Zusammenfassend: Maxwellgleichungen

differentielle Form | Integral-Form

- $\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)$ $\qquad$ $\oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{D} = \int_V dV \, \rho(\underline{r},t)$

- $\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r},t)$ $\qquad$ $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t)$

  Induktionsgesetz

- $\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0$ $\qquad$ $\oint d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0$

- $\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{Maxwell'scher Ergänzungsterm}}$ $\qquad$ $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{H}(\underline{r},t) = \int d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t) + \int d\underline{F} \, \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}$

Bemerkungen

- Maxwell-Gl. linear in den Feldern

  $\rightarrow$ Superpositionsprinzip

- Es kommen nur 1. Ableitungen bzgl. der Zeit vor

→ Durch Vorgabe der Felder bei $t=0$ sind die Felder bei $t>0$ vollständig bestimmt!

- Die letzte Gl. enthält die Kontinuitätsgleichung!

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times \underline{H})}_{0} = \nabla\cdot \underline{j} + \underbrace{\nabla\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}}_{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\underline{D} = \frac{\partial}{\partial t}\rho} \,!$$

- Die angegeben Gleichungen gelten auch "in Materie"

— nur stimmen dann die Beziehungen

$$\underbrace{\begin{aligned}\underline{D} &= \varepsilon_0\, \underline{E}\\ \underline{H} &= \frac{1}{\mu_0}\,\underline{B}\end{aligned}}_{\text{Vakuum}}$$

nicht mehr! (Materialbeziehungen → später)

IV.5. Energiebilanz in der Elektrodynamik

Frage: Enthalten die Maxwell-Gl. neben der Kontinuitätsgl. noch weitere Erhaltungssätze (bzw. Bilanzgleichungen)

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = 0 \quad \Big| \cdot \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j} \quad \Big| \cdot \underline{E}$$

Multiplikation

Subtrahieren

$$\underbrace{\underline{H}\cdot(\nabla\times\underline{E}) - \underline{E}\cdot(\nabla\times\underline{H})}_{\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H})} + \underbrace{\overset{\mu_0^{-1}\underline{B}}{\underline{H}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0^{-1}\underline{B}^2\right)} + \overset{\varepsilon_0\underline{E}}{\underline{E}}\frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2\right) = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

definiere die <u>Energiedichte</u> des elektrodyn. Feldes

$$w(\underline{r},t) := \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2$$

in Analogie zu den entsprechenden Beziehungen in der Statik!

definiere außerdem den Poynting-Vektor

$$\underline{S}(\underline{r},t) := \underline{E}(\underline{r},t) \times \underline{H}(\underline{r},t)$$

„Energiestromdichte"

$$\rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} w(\underline{r},t)}_{\text{zeitl. Änderung der Energiedichte}} + \nabla \cdot S(\underline{r},t)$$

$$= -\underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$

„Energie-Bilanzgleichung"

<u>in integraler Form</u>

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_V d^3r \, w(\underline{r},t)}_{\text{Feldenergie}} + \int_V d^3r \, \nabla \cdot S(\underline{r},t) = -\int_V d^3r \, \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Gauss'scher Satz

$V \leftarrow$ beliebiges Volumen

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V d^3r\; w(\underline{r},t) + \int_{F_V} d\underline{F}\cdot \underline{S}(\underline{r},t) = -\int d^3r\; \underline{j}(\underline{r},t)\cdot \underline{E}(\underline{r},t)}$$

Die Feldenergie in einem Volumen V kann sich auf 2 Arten ändern

a) durch einen Energiestrom (Strahlung) durch die Oberfläche des Volumens V

b) durch Umwandlung von Feldenergie in "mechanische Energie"

$$\frac{dW^{mech}}{dt} = \int d^3r\; \underbrace{\underline{j}(\underline{r},t)\cdot \underline{E}(\underline{r},t)}_{\text{Leistungsdichte}}$$

Begründung?

Betrachte Ladung q im elektromagnet. Feld

Es wirkt die Lorentzkraft

$$\underline{F} = q\underline{E} + q\underline{v} \times \underline{B} \quad \text{mit} \quad \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

Verschiebe das Teilchen um $d\underline{r}$

$\Rightarrow$ Felder leisten die Arbeit $dW = \underline{F} \cdot d\underline{r}$ (Kraft mal Weg)

$$\Rightarrow dW = q E \, d\underline{r}$$

(denn das Magnetfeld leistet keinen Beitrag wegen $\underline{v} \times \underline{B} \perp d\underline{r}$

$\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right.$

Zugehörige Leistung (Arbeit pro Zeit)

$$\frac{dW}{dt} = q\,\underline{E}\,\frac{d\underline{r}}{dt} = q\,\underline{E} \cdot \underline{v}$$

$$= \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Typischerweise ist

$$\frac{dW^{mech}}{dt} > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\int_V d^3r \, \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t) < 0$$

denn:

„Ohm'sches Gesetz"

In vielen Metallen gilt $\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma \underline{E}(\underline{r},t)$

(linearer Zusammenhang, räuml. lokal, zeitlich instantan) Leitfähigkeit konstant, $\sigma > 0$

$$\Rightarrow -\int_V d^3r \, \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$

$$= \underbrace{-\sigma \int_V d^3r \left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2}_{<0}$$

Verlust von Feldenergie durch Stromfluß!

und:
Feldenergie kann auch dann kleiner werden, wenn der Energiestrom durch die Oberfläche verschwindet!

analog kann man eine Gleichung zur Impulsbilanz herleiten → Übung

$$\underline{P}^{Feld} = \int_V d\underline{r} \, \left(\underline{D}(\underline{r},t) \times \underline{B}(\underline{r},t) \right)$$

IV.6. Elektromagnetische Potentiale, Eichungen

Erinnerung Statik

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \implies \underline{E} = -\nabla_{\underline{r}} \Phi$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0} \implies \Delta_{\underline{r}} \Phi = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \rightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 j \implies \Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 j$$

$$\operatorname{div} \underline{A} = 0$$

Verallgemeinerung für Dynamik?

Startpunkt:

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0 \implies$$ Ansatz wie in Magnetostatik

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$$

setze dies in das Induktionsgesetz ein

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$

$$\implies \nabla \times \left(\underline{E} + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)\right) = 0$$

Ansatz für $\underline{E}$:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla_{\underline{r}}\,\phi(\underline{r},t) - \frac{\partial \underline{A}(\underline{r},t)}{\partial t}$$

erfüllt offensichtlich das Induktionsgesetz!! (wegen $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$)

man nennt $\phi(\underline{r},t)$ und $\underline{A}(\underline{r},t)$ die elektrodynamischen Potentiale!

Man sieht aus den Ansätzen, dass <u>Eichtransformationen</u> möglich sind!

a) $\underline{B}$ ändert sich nicht

$$\underline{A}(\underline{r},t) \longrightarrow \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla_{\underline{r}}\, \varphi(\underline{r},t)$$

$$\begin{aligned}\underline{B}' &= \nabla \times \underline{A}' \\ &= \nabla \times \underline{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla_r \varphi}_{0} \\ &= \underline{B}\end{aligned}$$

b) Da $\underline{A}$ auch in $\underline{E}(\underline{r},t)$ vorkommt, muss $\Phi(\underline{r},t)$ passend mittransformiert werden!

$$\begin{aligned}\underline{E}'(\underline{r},t) &= -\nabla_r \Phi'(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\underline{A}'(\underline{r},t)}_{\underline{A}+\nabla_r\varphi} \\ &\overset{!}{=} \underline{E}(\underline{r},t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ -\nabla_r \Phi' - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} - \nabla_r \frac{\partial}{\partial t}\varphi$$

$$\overset{!}{=} -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r},t) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \underline{A}(\underline{r},t)}$$

$$\Rightarrow \Phi'(\underline{r},t) = \Phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\underline{r},t)$$

Folgende Transformationen sind erlaubt:

$$\underline{A}(\underline{r},t) \longrightarrow \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla_{\underline{r}} \varphi(\underline{r},t)$$

$$\Phi(\underline{r},t) \longrightarrow \Phi'(\underline{r},t) = \Phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\underline{r},t)$$

Eichinvarianz:

$$\underline{B}'(\underline{r},t) = \underline{B}(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}'(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t)$$

φ heißt Eichfunktion

Frage: Welche Eichungen sind zweckmäßig?

Ziel ist immer die größtmögliche Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen bzw. der resultierenden Potentialgleichungen!

Wir wissen: mit $\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

ist $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ und $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ bereits erfüllt!

Betrachte zunächst:

$$\nabla \cdot \underline{D} = \varrho$$

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} \implies \nabla \cdot \underline{E} = \varrho / \varepsilon_0$

$$\iff -\Delta_{\underline{r}} \phi - \nabla \cdot \dot{\underline{A}} = \varrho / \varepsilon_0$$

$$\frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t}$$

andererseits:

$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\dot{E}} \longrightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$

$(\Leftrightarrow \nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \underline{\dot{D}})$

$= \mu_0 \underline{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \dot{\Phi} - \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\ddot{A}}$

Linke Seite der 2. Gleichung

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{A}) - \Delta_{\underline{r}} \underline{A}$$

$$= \mu_0 j - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \dot{\Phi} - \mu_0 \varepsilon_0 \underline{\ddot{A}}$$

benutze $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

$$\rightarrow \Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{\dot{A}}(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \quad \mathrm{I}$$

$$\left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A}(\underline{r},t) - \nabla_{\underline{r}}\left(\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}(\underline{r},t)\right) = -\mu_0 j(\underline{r},t) \quad \mathrm{II}$$

man sieht:

I und II (inhomogenen Maxwell-Gl. ausgedrückt durch Φ und $\underline{A}$)

sind gekoppelt!

Ziel: Entkopplung durch passende Eichtransformation

Es gibt 2 gängige Eichtransformationen

i) Die Lorentz-Eichung

Wähle die Eichfunktion so, daß

$$\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0$$

$\Rightarrow$ aus (I) wird offensichtlich

$$\underbrace{\left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{\Box}\underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0\,\underline{j}(\underline{r},t)$$

$\Box$ d'Alembertscher Operator

außerdem..

$$\nabla\cdot\dot{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\underline{A}(\underline{r},t)$$

$$- \; -\frac{1}{c^2}\ddot{\Phi}(\underline{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(\underline{r},t)$$

Damit wird aus Gl. (I)

$$\rightarrow \Box\,\Phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$