Maxwell-Gl. ausgedrückt für die elektrodyn. Potential

(I) $\Delta_{\underline{r}}\, \phi(\underline{r},t) + \nabla \cdot \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$

(II) $\left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A}(\underline{r},t)$

$- \nabla_{\underline{r}}\left(\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\underline{r},t)\right) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$

Ziel: Entkopplung bzgl. $\underline{A}$, ϕ

Eichinvarianz: $\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\varphi$

$\phi \to \phi' = \phi - \dot{\varphi}$

Lorentzeichung: $\boxed{\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0}$

Folgerung

$\nabla \cdot \dot{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \underline{A})$

$= -\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}$

in (I) $\Rightarrow$ $$\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r},t) - \frac{1}{c^2}\ddot{\phi} = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

(II) $\Rightarrow$ $$\underbrace{\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r},t) - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}}}_{\Box \underline{A}} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

Bemerkungen

- In der Lorentzeichung sind die Potentialgl. völlig symmetrisch bzgl. $\underline{A}$ und ϕ
- Im zeitunabhängigen Fall reduzieren sich die Pot.-Gl. auf
$$\Delta_{\underline{r}} \phi = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$
$$\Delta_{\underline{r}} \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$
- Implikation der Lorentzbedingung $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$ für die Eichfunktion:

Nehme an, daß $\underline{A}$ und ϕ die Original-Gl. I und II erfüllen, aber noch nicht die Coulombbedingung!

$$\underline{A} \to \underline{A}' = \underline{A} + \nabla\varphi$$
$$\phi \to \phi' = \phi - \dot{\varphi}$$

fordere: $\nabla\cdot\underline{A}' + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}' \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} + \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} \overset{!}{=} 0$$

Die Eichfunktion muss somit erfüllen: $\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = \Box\varphi = -\left(\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}\right)$

- Falls $\underline{A}$ und ϕ schon die Coulombbedingung erfüllen, dann gibt es immer noch eine Eichfreiheit

$\Rightarrow$ mit $\underline{A}$ und ϕ erfüllen auch $A + \nabla\varphi$ und $\phi - \dot{\varphi}$ die Coulombbedingung falls $\underbrace{\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0}$

$$\Box\varphi = 0$$

Alle Potentiale in dieser Gruppe gehören zur „Lorentzeichung".

- Die Bedingung $\Box\varphi = \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 0$ drückt an sich schon „Lorentz-Invarianz" (Unabhängigkeit vom Bezugssystem) aus

$\Longrightarrow$ daher der Name „Lorentz-Eichung"; spez. Relativitätstheorie

III. 5.3. Die Coulomb-Eichung

Wähle Eichfunktion $\varphi(\underline{r},t)$ so, dass

$$\boxed{\nabla\cdot\underline{A} = 0}$$

Erinnerung:

$$(\mathrm{I})\quad \Delta_r\,\Phi + \nabla\cdot\dot{\underline{A}} = -\,\rho/\varepsilon_0$$

$$\text{II} \quad \Box \underline{A} - \nabla\left(\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}\right) = -\mu_0 \underline{j}$$

aus Coulomb-Eichung

$$\nabla\cdot\dot{\underline{A}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{aus I}} \quad \Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$\underline{A}$ kommt nicht mehr vor!

aus II $\quad \Box \underline{A} - \frac{1}{c^2}\nabla\dot{\Phi} = -\mu_0 \underline{j}$ $\quad$ noch gekoppelt!

Die erste Gl. hat dieselbe Form wie in der Elektrostatik (Poisson-Gl.)!

$$\xrightarrow{\text{Lösung}} \quad \Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

damit $\dot{\Phi} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\underline{r},t)$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r}',t)$$

$\boxed{\dot{\rho} + \nabla j = 0}$

Kontinuitäts-gleichung

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \nabla_{r'} \cdot j(\underline{r}',t)(-1)$$

setze dies in die Gl. für $\underline{A}$ ein

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Box \underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0 j(\underline{r},t) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\underline{r}} \int d^3r' \frac{\nabla' \cdot j(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r},t) &= -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \end{aligned}}$$

Bemerkung

• Die Gl. für Φ hat die bekannte (aus der Statik) Lösung

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d^3r' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Das Potential Φ zur Zeit t ist allein durch die Ladungsdichte zur Zeit t bestimmt!

"Das skalare Potential in der Coulomb-Eichung ist das instantane Coulombpotential".

$\Rightarrow$ daher der Name Coulomb-Eichung!

• Kompatibel mit stat. Fall

• Die Gl. für $\underline{A}$ formuliert man manchmal so um:

$$\Box_{\underline{r}}\, \underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0\, \underline{j}_{trans}$$

$\rightarrow$ Übung

transversaler Strom

Hintergrund

$$\left(\underline{j} = \underline{j}_{trans} + \underline{j}_{longitudinal}\right)$$

$$\nabla \cdot \dot{j}_{trans} = 0$$

V. Elektromagnet. Wellen

V.1. Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Betrachte Raum ohne Ladungen und Ströme

$\Rightarrow$ Maxwell-Gl. im Vakuum

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \qquad , \quad \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \dot{\underline{D}} \qquad \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

- Im Zeitunabhängig. Fall

wären gar keine Felder vorhanden

$$\underline{E} = \underline{B} = 0$$

- Dasselbe würde passieren, wenn $\dot{\underline{D}} = 0$

  Verschiebungsstrom

- Maxwell hat erkannt:

  Die richtigen Gl. haben auch Lösungen im Vakuum!

  → elektromagnet. Wellen

V.2. Wellengleichung (im Vakuum) und allgemeine Lösungen

Aus den Maxwell-Gl. folgt unmittelbar

"homogene Wellengleichungen"

$$\Box\, \underline{E}(\underline{r},t) = 0$$

$$\Box\, \underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

→ Übung

(beachte: Für die Potentiale in der Coulombeichung gilt ebenfalls

$$\Box\, \underline{A}(\underline{r},t) = 0$$

$$\Box\, \Phi(\underline{r},t) = 0$$

)

allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\Box\, u(\underline{r},t) = 0$$

u : Eine Komponente von $\underline{E}, \underline{B}$ ($\underline{A}$, bzw φ)

Ansatz:

$$u(\underline{r},t) = F(\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t}_{\text{Phase } \varphi(\underline{r},t)})$$

F: beliebige, 2x diff.bare Funktion der Phase φ

$$\Box\, u(\underline{r},t) = \left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F(\varphi)$$

Kettenregel

$$= \left(F''(\varphi)\,\underline{k}^2 - F''(\varphi)\frac{\omega^2}{c^2}\right)$$

mit $F''(\varphi) = \frac{d^2F}{d\varphi^2}$

$$= \left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) F''(\varphi)$$

$\doteq 0$

Es muß also gelten: $\boxed{\omega = ck}$

generell:

$\omega \Leftrightarrow k$ Dispersionsrelation

hier: $\omega(k) = ck$

Dispersionsrelation im Vakuum!

(Unterschied zur nichtrelativist. QM $\omega \sim k^2$

(da $E = \hbar\omega$
$p = \hbar \underline{k}$))

Betrachte nun genauer den Ausdruck für die Phase

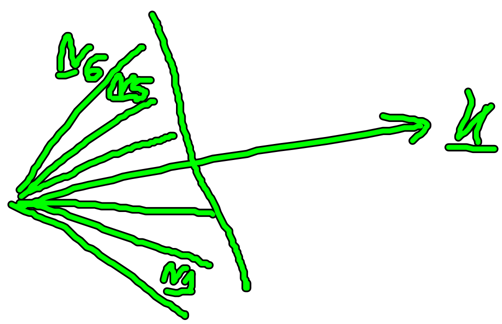
$$\varphi(\underline{r}, t) = \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t$$

Betrachte Situation mit konstanter Phase

$$\varphi(\underline{r},t) = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t = \varphi_0 = \text{const}$$

Für eine "Momentaufnahme" ($t = \text{const}$)

$\underline{k}\cdot\underline{r} = \text{const}$ $\Longleftrightarrow$ Dies ist die Gl. einer Ebene senkrecht zu $\underline{k}$!



$\underline{k}\cdot\underline{r}_i = \text{const}$

$\Rightarrow$ Flächen gleicher Phase sind Ebenen im Raum!

Betrachte die Bewegung der Ebene als Funktion der Zeit

$$\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t - \varphi_0 = 0$$

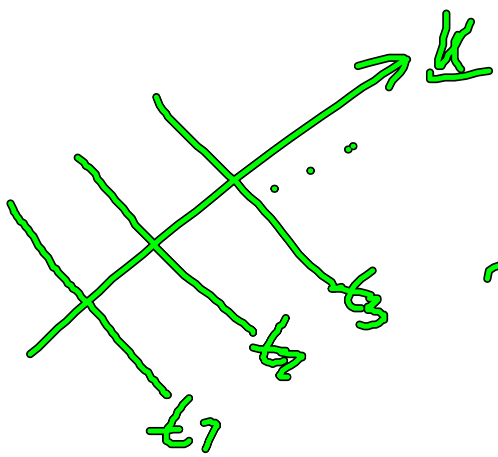
$$\underline{k}\cdot\underbrace{\left(\underline{r} - \frac{\underline{k}}{k^2}(\omega t + \varphi_0)\right)}_{\underline{r}(t)} = 0$$

$$\underline{r}(t) = \frac{\underline{k}}{k^2}(\omega t + \varphi_0)$$ beschreibt Bewegung der Ebene

man sieht:

$$\underline{v}(t) \underset{\text{parallel}}{\parallel} \underline{k}$$

$\Rightarrow$ $\underline{k}$ ~~ist~~ ist die Ausbreitungsrichtung



Bewegung der Ebene

Phasengeschwindigkeit: $\underline{v}_{Phase} = \frac{dx}{dt}\Big|_{\varphi=\text{konst}} = \frac{\underline{k}}{k^2}\,\omega$

$$\Rightarrow \underline{v}_{phase} = \underbrace{c}_{\text{Lichtgeschwindigkeit}} \underbrace{\frac{\underline{k}}{k}}_{\text{Einheitsvektor in Richtung } \underline{k}}$$

Die Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus!

Eine spezielle Klasse dieser Lösungen sind die (harmonischen) ebenen Wellen

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{\hat{u}(\underline{k})}_{\text{Amplitude}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

(i.A. Funktion von $\underline{k}$ und komplex)

Diese Wellen sind periodisch sowohl im Raum als auch in der Zeit!

man definiert

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ Periode bzw. Schwingungsdauer $u(\underline{r}, t+\tau) = u(\underline{r},t)$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ Wellenlänge $u(\underline{r} + \lambda\frac{\underline{k}}{k}, t) = u(\underline{r},t)$

Die Wellengleichungen für $\underline{E}$ und $\underline{B}$ sind linear

→ Superpositionsprinzip

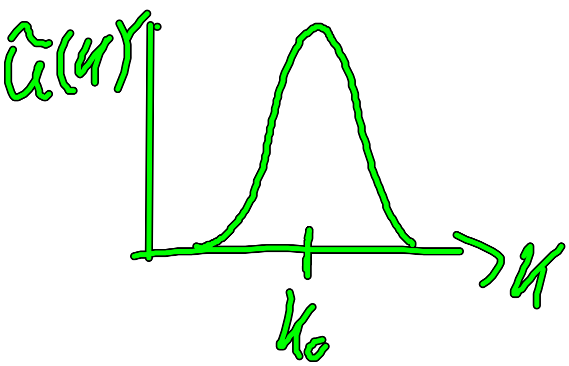
$$u(\underline{r},t) = \underbrace{\int d^3k \; \hat{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}}_{\text{Überlagerung ebener Wellen mit verschiedenen Wellenvektoren } \underline{k}}$$

Wellenpaket

ist ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung!

man interpretiert hier $\hat{u}(k)$ als Gewichtsfunktion

typ. Form



in 1D

Lokalisierung des Pakets um Wellenvektor $\underline{k}_0$