

ebene Wellen

$$u(\underline{r}, t)$$

$$\square u(\underline{r}, t) = 0$$

$$\approx e^{i(\underbrace{\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t}_{\varphi(\underline{r}, t)})}$$

Linearität $\omega = c|\underline{k}|$, $k = |\underline{k}|$

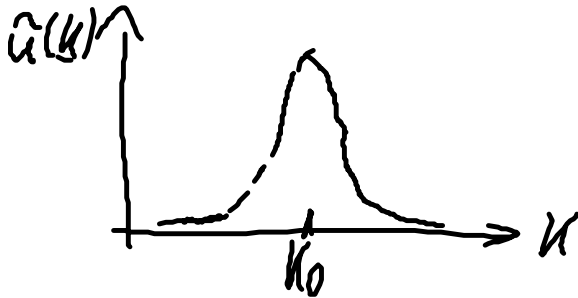
Superposition: Wellenpaket $i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$

$$u(\underline{r}, t) = \int d\underline{k} \tilde{u}(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Gewichtsfunktion:

dreidimensionales
Integral!

in einer Dim.



häufig:

Die Gewichtsfunktion ist
"lokalisiert" um einen bestimmten
Wellenvektor \underline{k}_0

also, $\tilde{u}(\underline{k})$ ist klein für $\underline{k} \neq \underline{k}_0$

\Rightarrow Taylorentwicklung der Phase φ
um \underline{k}_0

Betrachte die Phase als Fkt. von \underline{k}

$$\varphi(\underline{k}) = \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t \quad \text{mit } \omega = \omega(\underline{k})$$

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{k}) &\approx \varphi(\underline{k}_0) + \underbrace{(\underline{k} - \underline{k}_0)}_{\Delta \underline{k}} \left(\underbrace{\nabla_{\underline{k}} \varphi(\underline{k})}_{\underline{k} = \underline{k}_0} \right) + \mathcal{O}(\Delta \underline{k}^2) \\ &= \underbrace{\underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega(\underline{k}_0) t}_{\varphi(\underline{k}_0)} + (\underline{k} - \underline{k}_0) \left(\underline{r} - \underbrace{\nabla_{\underline{k}} \omega(\underline{k})}_{\underline{k}_0} t \right) + \mathcal{O}(\Delta \underline{k}^2) \end{aligned}$$

Definiere jetzt die
sogenannte Gruppengeschwindigkeit
(für allgemeine Dispersionsrelation)

$$\underline{v}_g = \nabla_{\underline{k}} \omega(\underline{k}) \Big|_{\underline{k} = \underline{k}_0}$$

Damit

$$\varphi(\underline{k}) \approx \underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega_0 t + (\underline{k} - \underline{k}_0) (\underline{r} - \underline{v}_g t)$$

Einsetzen in den Ausdruck für das Wellenpaket

$$u(\underline{r}, t) = \int d\underline{k} \tilde{u}(\underline{k}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$\approx e^{i(\underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega_0 t)} \int d\underline{\tilde{k}} \tilde{u}(\underline{\tilde{k}} + \underline{\tilde{k}}_0) e^{i \underline{\tilde{k}} (\underline{r} - \underline{v}_g t)} \quad \left[\underline{\tilde{k}} = \underline{k} - \underline{k}_0 \right]$$

"Trägerwelle"
mit Phasengeschwindigkeit
 $\underline{v}_p = \frac{\omega_0}{\underline{k}_0}$

Wechsel der Integrationsvariable

$$\underline{k} \rightarrow \underline{\tilde{k}}$$

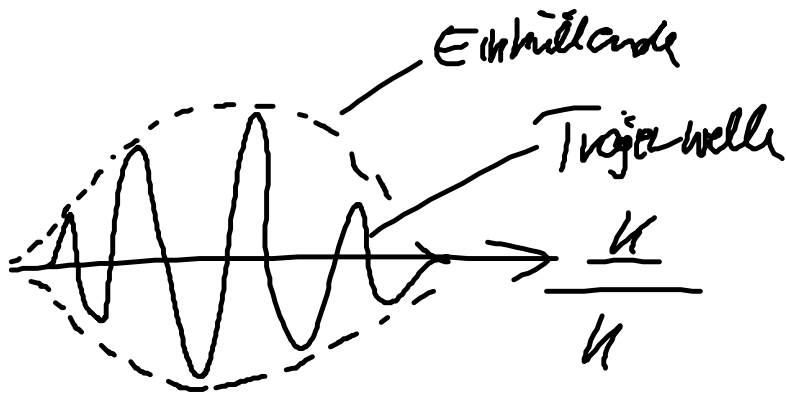
Einklemmung

$$\underline{v}_p = \frac{\omega}{\underline{k}} = \frac{\omega}{\underline{k}}$$

Def.

"Einhüllende"

Maximum bewegt sich mit
Gruppengeschwindigkeit
 $\underline{v}_g = \left(\nabla_{\underline{k}} \omega(\underline{k}) \right)_{\underline{k} = \underline{k}_0}$



beachte: Im hier betrachteten Fall
(Vakuum)

$$|v_p| = |v_g| = c \quad \text{Lichtgeschwindigkeit!}$$

Transversalität von Wellen im Vakuum

Betrachte folgende Lösung ^{Amplitude (mög. komplex)}

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$
$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Frage:
Wie stehen die Vektoren \underline{k} , \underline{E}_0 , und \underline{B}_0
relativ zueinander?

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$
$$\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\underline{E}}$$

einsetzen

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{E} &= \nabla \cdot (\underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}) \\ &= \underline{E}_0 \cdot \nabla_{\underline{r}} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \\ &= \underline{E}_0 \cdot i \underline{k} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

analog \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 \\ \underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0 \end{cases}$$

$\neq 0$

Amplituden-
Die Vektoren $\underline{E}_0, \underline{B}_0$
stehen senkrecht auf
der Ausbreitungsrichtung \underline{k}
 \Rightarrow Transversalwellen

Beachte :

B ist immer Transversalwelle
(da immer $\nabla \cdot \underline{B} = 0$)

aber \underline{E} nicht
(falls $g(\underline{r}, t) \neq 0$)

Weitere Folgerung

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\Rightarrow \left((i\underline{k} \times \underline{E}_0) - i\omega \underline{B}_0 \right) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} = 0$$

Einsetzen $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\varphi}$
 $\underline{B} = \underline{B}_0 e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \omega \underline{B}_0 = \underline{k} \times \underline{E}_0$$

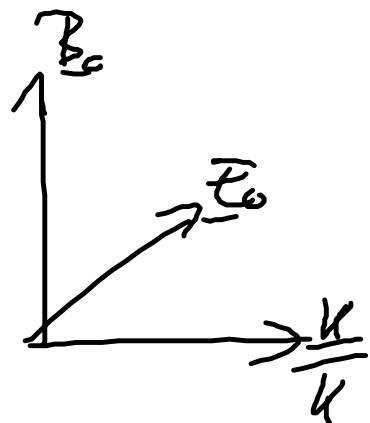
$$\Leftrightarrow \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0 \right)$$

analog aus

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\underline{E}} = 0$$

$$i\underline{k} \times \underline{B}_0 + i \underbrace{\frac{\omega}{c^2}}_{\frac{k}{c}} \underline{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}_0 = -c \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{B}_0 \right)$$



$\Rightarrow \underline{E}_0, \underline{k}, \underline{B}_0$ bilden ein
orthogonales Rechtssystem

Beispiel

Ausbreitungsrichtung $\frac{\underline{k}}{k} = \underline{e}_z$

Eine mögl. Lösung ist

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = (E_{0,x} \underline{e}_x + E_{0,y} \underline{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} (-E_{0,y} \underline{e}_x + E_{0,x} \underline{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$$

Offensichtlich ist diese elektromagnet. Welle
allein durch einen der Vektoren $\underline{E}_0, \underline{B}_0$
(sowie \underline{k}, ω) bestimmt!

V.3 Polarisation ebener Wellen

betrachte genau (mit $\underline{k} = k \underline{e}_z$)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = (E_{0,x} \underline{e}_x + E_{0,y} \underline{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$$

$E_{0,x}, E_{0,y}$ sind i. A. komplexe Größen

$$E_{0,x} = a_x e^{i d_x}$$

$$E_{0,y} = a_y e^{i d_y} \quad \text{mit } a_x, a_y, d_x, d_y \text{ reell}$$

Beach:
Das physikalische E-Feld ist reell.

$$\Rightarrow \underline{E}(r, t) = E_x(r, t) \underline{e}_x \\ + E_y(r, t) \underline{e}_y$$

$$\text{mit } E_x = \text{Re} (E_{0,x} e^{i(kz - \omega t)}) \\ - \text{Re} (a_x e^{i\delta_x + ikz - i\omega t})$$

$$\textcircled{*} = a_x \cos(\underbrace{kz - \omega t}_{\varphi} + \delta_x)$$

$$\text{und } E_y = a_y \cos(\underbrace{kz - \omega t}_{\varphi} + \delta_y)$$

$$\Rightarrow \frac{E_x}{a_x} = \cos(\varphi + \delta_x) \\ = \cos\varphi \cos\delta_x \\ - \sin\varphi \sin\delta_x$$

Additionstheorem!
für cos

$$\frac{E_y}{a_y} = \cos\varphi \cos\delta_y - \sin\varphi \sin\delta_y$$

betrachte

$$\textcircled{1} \frac{E_x}{a_x} \sin d_y - \frac{E_y}{a_y} \sin d_x = \cos \varphi \sin \underbrace{(d_y - d_x)}_d$$

Nochmal Additionstheoreme

$$\textcircled{2} \frac{E_x}{a_x} \cos d_y - \frac{E_y}{a_y} \cos d_x = \sin \varphi \sin d$$

Durch Kombination dieser Gleichung

lässt sich $\varphi = \arccos \dots$ und

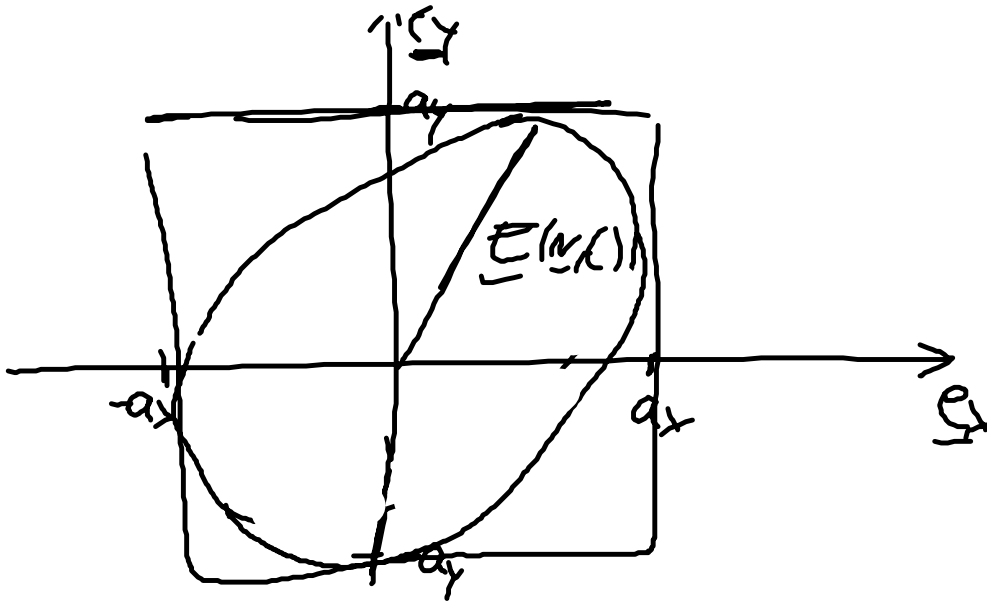
dann die Orts- und Zeitabhängigkeit

eliminieren!

$$\textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y} \right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_x} \frac{E_y}{a_y} \cos d = \sin^2 d$$

Dies ist eine Ellipsengleichung für E_x und E_y !



Interpretation:

Der Vektor läuft auf einer Ellipse und
 um k herum "elliptische Polarisation"

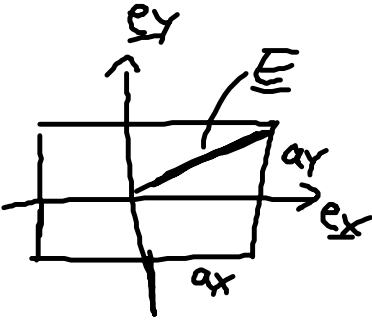
Spezialfälle

a) linear polarisierte Welle

$$\delta = \delta_y - \delta_x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \pm \pi$$

⇒ Ellipsengleichung

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 \pm \frac{E_x}{a_x} \frac{E_y}{a_y} = 0$$



$$\frac{E_x}{a_x} \pm \frac{E_y}{a_y} = 0$$

unabhängig
von Ort und Zeit

⇒ Gesamtfeld (siehe auch Ⓢ)

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = (a_x \underline{e}_x \pm a_y \underline{e}_y) \cos(kz - \omega t + d_x)$$

E schwingt in fester Richtung relativ zu k!

b) Zirkular polarisierte Welle

$$d = d_y - d_x = \pm \frac{\pi}{2}$$

nehme $a_x = a_y = a$

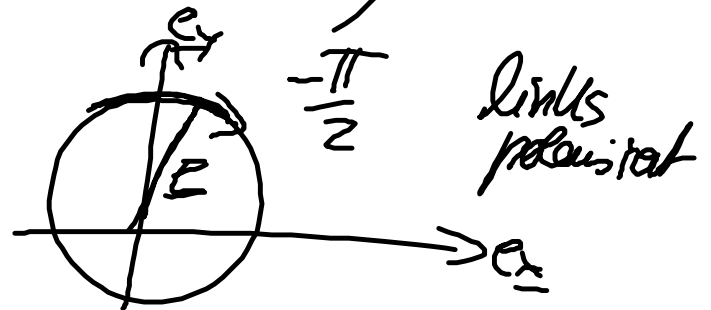
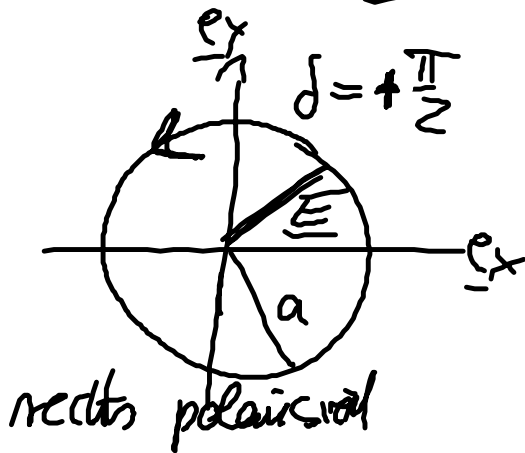
aus Ellipsengleichung

$$E_x^2 + E_y^2 = a^2$$

Kreisgleichung

Gesamtfeld

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}, t) &= a \cos(kz - \omega t + \delta_x) \underline{e}_x \\ &+ a \cos(kz - \omega t + \delta_x \pm \frac{\pi}{2}) \underline{e}_y \\ &= a \left(\cos(kz - \omega t + \delta_x) \underline{e}_x \right. \\ &\quad \left. \pm \sin(kz - \omega t + \delta_x) \underline{e}_y \right) \end{aligned}$$



Zirkular polarisiertes Licht entspricht
 einer Überlagerung zweier
 linear polarisierter Wellen, die um $\frac{\pi}{2}$
 phasenverschoben sind!

V.5. Energie von Vakuumwellen

Betrachte Welle = reell

$$\underline{E}(r,t) = \underline{E}_0 \cos(k \cdot r - \omega t)$$

$$\underline{B}(r,t) = \underline{B}_0 \cos(k \cdot r - \omega t)$$

"reell"

$$\text{mit } \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{k}{k} \times \underline{E}_0$$

Energiedichte

$$w(r,t) = \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r,t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(r,t))^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r,t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{E}(r,t))^2 \frac{1}{c^2}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r,t))^2 + \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(r,t))^2$$

$$= \epsilon_0 (\underline{E}(r,t))^2$$

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$$

Poyntingvektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

$$= \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \underline{E} \times \left(\frac{\kappa}{\kappa_0} \times \underline{E} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\underline{E})^2 \frac{\kappa}{\kappa_0}$$

Kombiniere mit Ausdruck für die Energiedichte

$$\underline{S}(\underline{r}, t) = w(\underline{r}, t) c \frac{\kappa}{\kappa_0}$$

analog Magnetfeld

$$\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \underline{v}$$

$$\text{dyn. } \underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \underline{v}$$

mit dieser Perspektive sieht man:

S = $w(r,t)$ "mal" $c \frac{k}{v}$
Energiedichte Ausbreitungsgeschwindigkeit
entspricht tatsächlich einem Strom!