V.5. Erzeugung elektromagnet. Erzeugung

Betrachte dazu die Potentialgleichung in der Lorentzeichung

$$\Box \phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad \text{mit } \Box = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{B} &= \nabla \times \underline{A} \\ \underline{E} &= -\nabla\phi - \dot{\underline{A}} \end{aligned}}$$

Uns interessiert der Fall $\rho \neq 0$, $\underline{j} \neq 0$

$\Rightarrow$ inhomogene Wellengleichungen!

Aufgabe:

Lösung der Gl. unter der Annahme dass keine Randbedingungen außer den "üblichen": $\phi, \underline{A} \to 0$ für $r \to \infty$

$\uparrow$ Abstand von der Quelle

V.5.1. Formale Lösung, Retardierte Green'sche Funktion

wir benutzen wie in der <u>Elektrostatik</u> das Konzept der Green'sche Fkt.

Erinnerung: $\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \int d^3r' \, G(\underline{r}-\underline{r}') \, \rho(\underline{r}')$$

"Faltung" im Raum

es gilt: $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

und $\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Dynamischer Fall

sei $u(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t)$ oder $A_\alpha(\underline{r},t)$

sei $f(\underline{r},t) = \frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$ oder $\mu_0 j_\alpha$ $(\alpha = x,y,z)$

zu lösen: $\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$

Ansatz:

$$u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \; \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')}_{\text{zeitabhängige Green'sche Funktion}} f(\underline{r}',t')$$

Faltung in Raum und Zeit!

Es muß gelten (damit $\Box u = -f$)

$$\boxed{\Box\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')}$$

Interpretation:

G entspricht dem Potential, das von einer punktförmigen Ladungsdichte ($q=1$) am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t' erzeugt wird

Außerdem:

$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ muß die Kausalitätsbedingung erfüllen:

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0 \quad \text{falls } t'>t \quad (t<t')$$

Denn: Die Welle $u(\underline{r},t)$ darf nur von Quellen aus der Vergangenheit bestimmt sein; zukünftige Zeiten dürfen keinen Einfluß haben!

Zur Berechnung von G benutze Fourier-transformation

$$f(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \tilde{f}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Rücktrafo

$$\tilde{f}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt \; f(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

analog für $u(\underline{r},t)$

$$\Box u(\underline{r},t) = \left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\underline{r},t)$$

Einsetzen der Fourierdarstellung von $u(\underline{r},t)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \tilde{u}(\underline{k},\omega) \left(-\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\right) e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)} \overset{!}{=} -f(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow -\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\tilde{u}(\underline{k},\omega) = -\tilde{f}(\underline{k},\omega)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\hat u(\underline{k},\omega) = \underbrace{\frac{1}{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)}}_{\hat G(\underline{k},\omega)} \hat f(k,\omega)}$$

unser Ansatz war

$$u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int dt' \, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}', t')$$

Folgerung

$\Longrightarrow \quad \hat G(\underline{k},\omega) = \frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$ ist die Fouriertransformierte der Green'schen Funktion.

Rücktransformation

$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat u(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\underline{r}-\omega t)}$$

$$\hat u(\underline{k},\omega) = \frac{\hat f(\underline{k},\omega)}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$$

mit formale Rücktrafo von $\hat f(\underline{k},\omega)$

$$= \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i(\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')-\omega(t-t'))}}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\right)$$

$$\times f(\underline{r}', t')$$

Durch Vergleich mit unserem Faltungsansatz folgt

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{i(\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}') - \omega(t-t'))}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

führe noch ein

$$\tau = t - t', \quad \underline{s} = \underline{r} - \underline{r}'$$

$$G(\underline{s}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} \, \Gamma(\underline{k}, \tau)$$

$$\text{mit} \quad \Gamma(\underline{k}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Berechne zunächst $\Gamma(\underline{k}, \tau)$

<u>Bemerkungen</u>:

- Beachte Kausalitätsbedingung

$$G(\underline{s}, \tau) \overset{!}{=} 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0$$

$$(t' > t)$$

"Zeitumkehr"

$$\Longrightarrow \quad \Gamma(\underline{k}, \tau) \stackrel{!}{=} 0$$

für $\tau < 0$

- Der Nenner im Integranden von $\Gamma(\underline{k}, \omega)$ wird Null für $\omega = \pm \omega_0$ mit $\omega_0 = ck$

denn

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \left(k - \frac{\omega}{c}\right)\left(k + \frac{\omega}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}(kc - \omega)(kc + \omega)$$

$$= \frac{1}{c^2}(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$$

$$= \frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Strategie: Komplexe Integration von $\Gamma(\underline{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$

Ersetze das Integral über reelle Frequenzen durch Kurvenintegral in der komplexen Ebene

$$\omega \longrightarrow \tilde{\omega} = \omega + i\omega'$$

reell $\qquad\qquad$ Imaginärteil

$$= R e^{i\varphi} \quad \text{mit } R = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, f(\omega) \longrightarrow \oint_{\text{Kurve}} d\tilde{\omega}\, \tilde{f}(\tilde{\omega}) \qquad \tan\varphi = \frac{\omega'}{\omega}$$

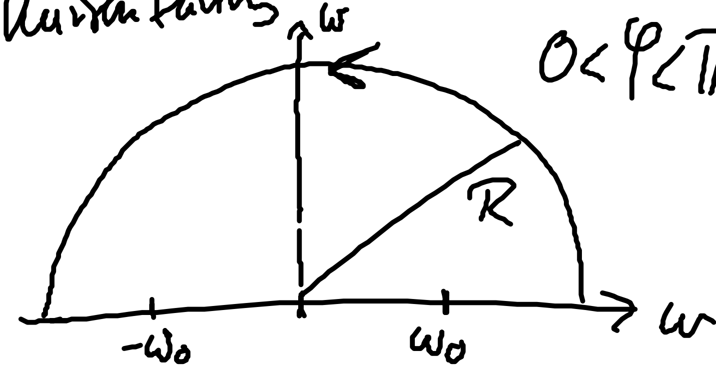
Beachte:

1) Beitrag vom Kurvenstück jenseits der reellen Achse muß verschwinden!
2) Integral muß verschwinden für $\tau < 0$

Zu 1)

prinzipiell gibt es 2 Arten der Kurvenführung

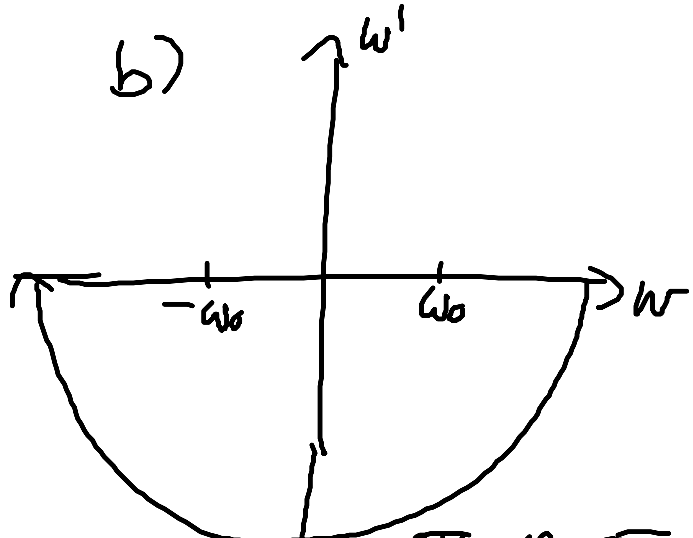
a)



$0 < \varphi < \pi$

Radius $R \to \infty$

b)



$\pi < \varphi < 2\pi$

Der Integrand $\dfrac{e^{-i\tilde{\omega}\tau}}{\frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \tilde{\omega}^2)}$ muß auf dem Halbkreis verschwinden!

setze $\hat{w} = w + i w'$

$$= R\cos\varphi + i R \sin\varphi$$

$$(R \to \infty \ !)$$

$$\lim_{R\to\infty} e^{-i\hat{w}\tau} = \lim_{R\to\infty} \left(e^{-iR\cos\varphi\,\tau} \, e^{R\sin\varphi\,\tau} \right)$$

$$\overset{!}{=} 0$$

Fallunterscheidung

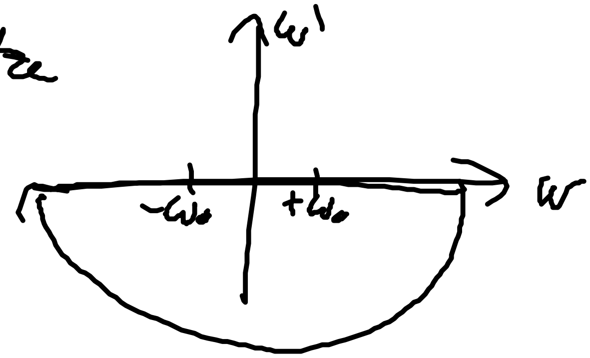
a) $0 < \varphi < \pi \implies \sin\varphi > 0$
Damit Integrand verschwindet, muß $\tau < 0$ sein!

b) $\pi < \varphi < 2\pi \implies \sin\varphi < 0$

$\implies$ Es muß $\tau > 0$!

Für $\tau > 0$ bzw $\tau < 0$ muß man die Kurve b) bzw a) nehmen!

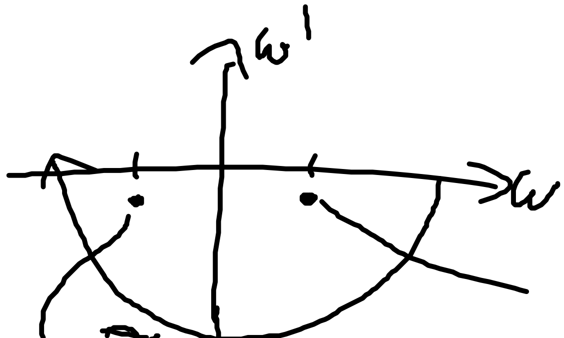
Für den hier interessierenden Fall $\tilde{\tau} > 0$ müssen wir also Weg b) benutzen



~~Gewährl~~ Wie gewährleistet man bei Weg b), dass das Integral für $\tilde{\tau} < 0$ ~~nicht~~ Null ergibt!

Hierfür:

$\Rightarrow$ Verschiebung die Pole um ein infinitesimales ε $(\varepsilon > 0)$ in die Halbebene



$\tilde{\omega}_1 = \omega_0 - i\varepsilon$

$\tilde{\omega}_2 = -\omega_0 - i\varepsilon$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau) = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{\frown} d\tilde{\omega} \frac{e^{-i\tilde{\omega}\tau}}{\frac{1}{c^2}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega})(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega})} \quad (-1)$$

Nebenrechnung

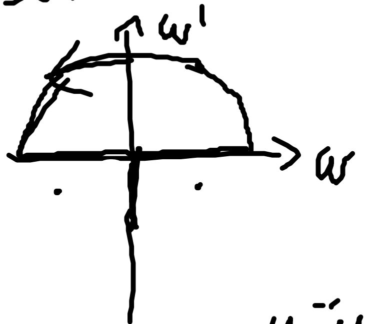
vorher Nenner

$$\frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{1}{c^2}(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \omega' \to 0}} (\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}) = \omega_0 - \cancel{i\varepsilon} - \omega - \cancel{i\omega'} = (\omega_0 - \omega)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \omega' \to 0}} (\tilde{\omega}_2 - \omega) = -\omega_0 - \cancel{i\varepsilon} - \omega - \cancel{i\omega'} = -(\omega_0 + \omega)$$

Betrachte $\tau < 0$



Kurve enthält keine Pole mehr !!

$$\oint_{\frown} d\tilde{\omega}\, f(\tilde{\omega}) = 0 \;!$$

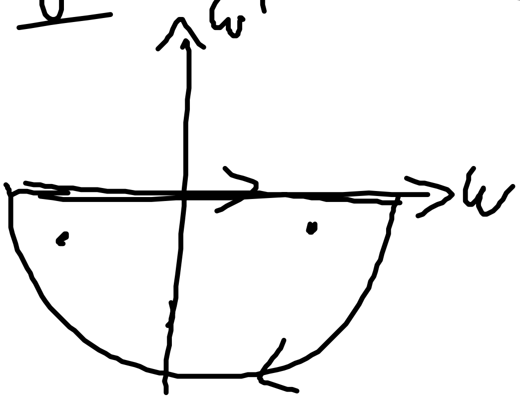
Cauchy'schen Integralsatz!

Damit: $\Gamma(\underline{k}, \tau < 0) = 0$

wie gefordert

$\Rightarrow$ Erfüllung der Kausalität!

Jetzt: $\hat{\tau} > 0$



Im Kurvengebiet ist $f(\hat{\omega}, \varepsilon)$ analytisch bis auf die beiden Pole

beachte: Pole erster Ordnung

Anwendung des Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z)\, dz = \sum_{\alpha=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_\alpha} f(z)$$

Summation über Polstellen

Residuum eines Pols erster Ordnung

$$\operatorname{Res}_{z_\alpha} f(z) = \lim_{z \to z_\alpha} \left[(z - z_\alpha) f(z) \right]$$

hier $f(z) \longrightarrow f(\hat{\omega}, \varepsilon) = \dfrac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{(-1)\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})}$

$$\operatorname{Res}_{\hat{\omega}_1} f(\hat{\omega}, \varepsilon) = \lim_{\hat{\omega} \to \hat{\omega}_1} \left[\frac{\cancel{(\hat{\omega} - \hat{\omega}_1)}\, e^{-i\hat{\omega}\tau}}{\frac{1}{c^2}(-1)\cancel{(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})}(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})} \right]$$

$$= \frac{e^{-i\hat{\omega}_1 \tau}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1)}$$

analog: $$\operatorname{Res}_{\hat{\omega}_2} f = \frac{e^{-i\hat{\omega}_2 \tau}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)}$$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint d\hat{\omega} \; \ldots$$

$$\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = - \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\pi i \left(\frac{e^{-i\hat{\omega}_1 \tau}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1)} + \frac{e^{-i\hat{\omega}_2 \tau}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)} \right) \right]$$

da Kurve nicht im positiven Sinne durchlaufen wird!

Erinnerung: $\hat{\omega}_1 = \omega_0 - i\varepsilon$

$\hat{\omega}_2 = -\omega_0 - i\varepsilon \qquad (\omega_0 = ck)$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = -2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega_0 \tau}}{\frac{1}{c^2}(-\omega_0 2)} + \frac{e^{i\omega_0 \tau}}{\frac{1}{c^2}(+\omega_0 \cdot 2)} \right)$$

$$\boxed{\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = 2\pi c^2 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0}}$$

Green'sche Funktion: (für $\tau > 0$)

$$G(\underline{s}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} \, \Gamma(\underline{k}, \tau)$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^3} \int d^3k \, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} \frac{\sin ck\tau}{k}$$

mit $\underline{s} = \underline{r} - \underline{r}'$
$\tau = t - t' > 0$

auswerten des $\underline{k}$ – Integrals in Kugel Koordinaten

$$\int d^3k \; \dots \; = \int_0^\infty dk\, k^2 \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta_k)$$

$$k = |\underline{k}|$$

und $\underline{k} \cdot \underline{s} = ks \cos\vartheta_k$

benutze $\displaystyle\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta_k)\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} = \dots = \frac{2\sin ks}{ks}$

$$\Rightarrow G(s,\tau) = \frac{c}{2\pi^2 s} \int_0^\infty dk \; \sin(ck\tau) \sin(ks)$$

$$s = |\underline{r} - \underline{r}'|$$

Substituiere noch:

$$x = ck$$

$$G(\underline{s},\tau) = \frac{1}{2\pi^2 s} \int_0^\infty dx \; \sin(x\tau) \sin\left(\frac{s}{c} x\right)$$

Schreibe die Sinusfunktion in Exponentialfkt. um und benutze $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{iax} = \delta(a)$

$\Longrightarrow$ Endergebnis

$$G(\underline{s}, \tau) = G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$$
$$= \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\left(\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) - \delta\left(t-t'+\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\right)$$

Beachte

die zweite δ-Fkt. ergibt Null für alle $t-t'>0$!!

Damit

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

Retardierte Green'sche Funktion