Wh:

$$\Box \phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = -\frac{\underline{j}(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

Ansatz: $$\boxed{u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, \underbrace{f(\underline{r}',t')}_{\text{Quelle}}} \quad (*)$$

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$$

Kausalitätsprinzip:

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \overset{!}{=} 0 \quad \text{für } t'>t$$

"Zukunft muß ausgeschlossen"

Fouriertransformation, Integration in der komplexen Zahlenebene, Residuensatz

$$\tilde{u}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\,\tilde{f}(\underline{k},\omega)$$

Endergebnis

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\dfrac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right), & t'<t \\ 0, & t'>t \end{cases}$$

"retardierte Green'sche Funktion"

Bemerkungen

- G erfüllt $\square \underbrace{G(\underline{r}-\underline{r}',t-t')}_{\text{zugehöriges Potential}} = \underbrace{-\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')}_{\text{Interpretation: Punkt-Ladungsdichte am Ort } \underline{r}' \text{ zur Zeit } t'}$

- Kausalität ~~erfüllt~~
  erfüllt!

- G ist "radial", hängt nur
  vom Abstand ab!

- Interpretation der Delta-Fkt. in G

$$\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

ungleich Null

$$t-t' = \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

Das durch die Punktladung erzeugte Potential (am Ort $\underline{r}'$) erreicht den Ort $\underline{r}$ erst nach der Zeit $\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$

$\Longrightarrow$ Störung breitet sich "nur" mit Lichtgeschwindigkeit aus!

„Retardierung"

(Zeitverzögerung)

Wir setzen G in unseren Ansatz ⊛ ein

$$u(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t')$$

$$= \int d^3r' \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \int_{-\infty}^{t} dt'\, \delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) f(\underline{r}',t')$$

$$= \int d^3r' \frac{f\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Für die ~~elektrody~~ elektromagnet. Potentiale gilt.

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$

Retardierte Potentiale!

Im Integral tritt die retardierte Zeit

$$t_{ret} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$ auf!

- Ebenso wie im stat. Fall sind die Integral i.A. schwer zu lösen
  $\Rightarrow$ Näherungen $\xrightarrow{\text{z.B.}}$ Multipolentwicklung

- Die angegebene Lösung für G und damit für Φ und $\underline{A}$ gelten für System ohne Ränder im Endlichen!

  In Anwesenheit solcher Ränder verwendet man dieselben Tricks wie in der Elektrostatik

$$G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) + F(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$$

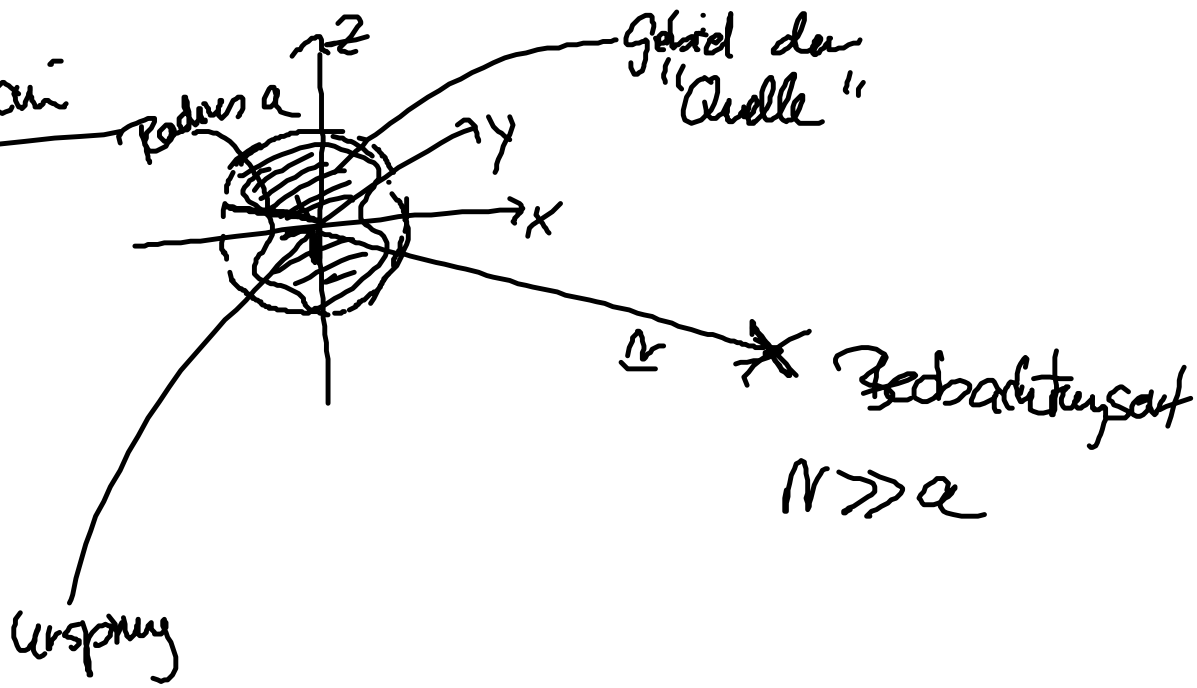
mit $\Box F(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = 0$

- Wie immer berechnen sich die Felder dann aus $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$, $\underline{E} = -\nabla\Phi - \dot{\underline{A}}$

V.5.2. Multipolstrahlung

Ziel: näherungsweise Berechnung der retardierten Potentiale für räumlich lokalisierte, aber jetzt zeitabhängige Ladungs- oder Stromverteilungen

Situation



Quelle: Zeitlich oszillierende Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r}', t') = \underline{j}_0(\underline{r}')\, e^{i\omega t'}$$

Vorgehensweise

Beachte: In der Coulombeichung gilt

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi}(\underline{r},t) = 0$$

$\Rightarrow$ Betrachte im folgenden nur $\underline{A}$, denn damit sind ϕ, $\underline{B}$, $\underline{E}$ festgelegt!

$\Rightarrow$ Ausgangspunkt:

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

Näherungen

1. Betrachte Beobachtungsorte mit $r \gg a \Leftrightarrow r \gg r'$ für alle $\underline{r}'$ im Quellenvolumen

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \ldots$$

$$= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\underline{r}}{r}\cdot\frac{\underline{r}'}{r} + \mathcal{O}\left(\cancel{\left(\frac{r'}{r}\right)^2}\right)\right)$$

genau wie in der Elektro- oder Magnetostatik!

Folgerung für den Integranden im Vektorpotential

$$\frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})$$

2. Näherung im <u>Zeitargument</u>

$$t_{ret} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$

$$= t - \frac{1}{c}\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta}$$

$$= t - \frac{1}{c}\, r \sqrt{1 - 2\frac{r'}{r}\cos\vartheta + \cancel{\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}$$

Taylorentwickl. von $\sqrt{1-2ax}$, $x = \frac{r'}{r} \ll 1$

$$\approx t - \frac{r}{c}\left(1 - \cos\vartheta\left(\frac{r'}{r}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)\right)$$

$$= t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}$$

$$\Rightarrow t_{ret} \approx \tilde{t} + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}}_{\Delta t} = \tilde{t} + \Delta t$$

$$\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$$

3. Näherung für Strom

$$j\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \approx j(\underline{r}', \tilde{t} + \Delta t)$$

$$\approx j(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{\partial}{\partial t} j(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\Delta t = 0} \Delta t$$

$$= j(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc} \frac{\partial}{\partial t} j(\underline{r}', \tilde{t})$$

nehme an, dass Δt klein ist gegen $t - \frac{r}{c} = \tilde{t}$

Betrachte nun alle Näherungen zusammen:

$$\frac{j(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{①}{\approx} \frac{1}{r} j(\underline{r}', t_{ret}) + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') j(\underline{r}', t_{ret})$$

$$\overset{③}{\approx} \frac{1}{r} j(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{1}{r} \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc} \frac{\partial}{\partial t} j(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\Delta t = 0}$$

$$+ \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') j(\underline{r}', \tilde{t})$$

$$+ \cancel{\frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc} \frac{\partial}{\partial t} j(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\Delta t = 0}}$$

enthält höhere Ordnung in $\frac{r'}{r}$!!

Damit folgt

$$\underline{A}(\underline{r},t) \approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) + \underline{A}^{(2)}(\underline{r},t)$$

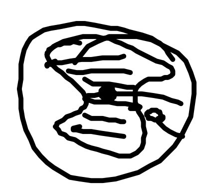
mit $$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t}) \qquad \tilde{t} = t-\frac{r}{c}$$

$$A^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d^3r' (\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(1+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\right)\underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

Implikationen unserer Näherungen hinsichtlich der retardierten Zeit

- Wir hatten angenommen

$$\Delta t = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r c} \ll \tilde{t} = t - \frac{r}{c}$$



$$\max(\Delta t) = \max\left(\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc}\right) = \max\left(\frac{r'\cos\alpha}{c}\right)$$

$= a/c$

also haben wir im Endeffekt vorausgesetzt

$\hat{t} \gg \frac{a}{c}$

also:

Retardierte Zeit durch Quelle im Ursprung $\gg \underline{\frac{a}{c}}$

relative Retardierung dadurch, daß Quelle ausgedehnt

- Wir hatten angenommen

$$\vec{j}(\vec{r}\,',t) = \vec{j}_0(\vec{r}\,')\, e^{i\omega t} \qquad \text{mit } \omega = ck$$

$\Rightarrow$ Retardierte Strom

$$\vec{j}(\vec{r}\,',t_{ret}) = \vec{j}_0(\vec{r}\,')\, e^{i\omega t - i\omega \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}}$$

Wir haben ersetzt (2. Näherung)

$$t_{ret} = \hat{t} + \Delta t$$

$$j(\underline{r}', t_{ret}) \simeq j_0(\underline{r}')\, \underbrace{e^{i\omega t - i\omega\frac{r}{c} + i\frac{\omega}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}}}_{e^{i\omega(\tau + \Delta t)}}$$

Was heißt nun Δt klein ??

$$\boxed{\Delta t = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc}}$$

Näherung gerechtfertigt falls

$$e^{i\frac{\omega}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}} \approx 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r} \ll 2\pi$$

Die linke Seite erzeugt ~~Zus~~ einen Zusammenhang zur Wellenlänge der Strahlung:

$$\omega = ck$$

$$\frac{\omega}{c}\frac{|\underline{r}\cdot\underline{r}'|}{r} = ka$$

$$\Rightarrow ka \ll 2\pi$$

$$a \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda$$

man sieht

$\lambda \gg a$

Wellenlänge der Strahlung viel ~~größer~~ größer als Ausdehnung der Quelle

V.5.3. Elektrische Dipolstrahlung, Hertz'scher Dipol

betrachte 1. Term in der Multipol-Entwicklung von $\underline{A}$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

mit $\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$

betrachte zunächst

$$\nabla_{\underline{r}'}\cdot(x_k'\,\underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})) \overset{\text{Produktregel}}{=} x_k'\,\nabla\cdot\underline{j}(\underline{r}',\tilde{t}) + (\nabla_{\underline{r}'}x_k')\cdot\underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

x_k' = $\underline{k}$-te Komponente von $\underline{r}'$

benutze Kontinuitätsgl.

$$\boxed{\nabla\cdot\underline{j} + \dot{\rho} = 0}$$

$$\nabla_{\underline{r}'} \cdot (x_\mu' \underline{j}) = - x_\mu' \dot{\rho}(\underline{r}', \tilde{t}) + j_\mu(\underline{r}', \tilde{t})$$

Oberflächenintegral im Unendlichen

$$\int d^3r' \, \nabla_{\underline{r}'} \cdot (x_\mu' \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})) = \int d\underline{F}' \, x_\mu' \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

(*)

$$= 0$$

da die Stromdichte lokalisiert im Endlichen $\Rightarrow \underline{j} = 0$ auf Rand

es folgt

$$\int d^3r' \, j_\mu(\underline{r}', \tilde{t}) = + \int d^3r' \, x_\mu' \dot{\rho}(\underline{r}', \tilde{t})$$

~~ein~~ Kombinieren mit Gl. für $\underline{A}^{(1)}$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \, \underline{r}' \dot{\rho}(\underline{r}', \tilde{t})$$

Erinnerung: $\underline{p}(t) = \int d^3r' \, \underline{r}' \rho(\underline{r}', t)$ Def. des elektr. Dipolmoments

$$\Rightarrow \dot{\underline{p}}(t) = \int d^3r' \, \underline{r}' \dot{\rho}(\underline{r}', t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\,\dot{\underline{p}}(\underbrace{t-\frac{r}{c}}_{\tau})}$$

Daher der Name

"elektrische Dipolstrahlung"