

Wk:

$$\square \phi(r, t) = - \frac{\rho(r, t)}{\epsilon_0}$$

$$\square \underline{A}(r, t) = - \frac{j(r, t)}{c^2}$$

Ansatz:
$$u(r, t) = \int d^3r' \int dt' G(r-r', t-t') \rho(r', t') \quad (*)$$

$$\square G(r-r', t-t') = - \delta(r-r') \delta(t-t')$$

Verursachungsprinzip:

$$G(r-r', t-t') = 0 \quad \text{für } t' > t$$

Zukunft muß ausgeschlossen!

Fourier-Transformation, Integration in der komplexen Ebene, Residuensatz

$$\tilde{u}(k, \omega) = \frac{1}{k^2 \frac{\omega^2}{c^2}} \tilde{f}(k, \omega)$$

Ergebnis

$$G(r-r', t-t')$$

$$= \left[\frac{1}{4\pi |r-r'|} \delta\left(t-t' - \frac{|r-r'|}{c}\right) \right], \quad t' < t$$

$$0, \quad t' > t$$

"retardierte Green'sche Funktion"

Bemerkungen

• G erfüllt $\square G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$ — $\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$
 zugehöriges Potential Interpretation: Punkt-Ladungsdichte am Ort \underline{r}' zu Zeit t'

• Randwert ~~erfüllt~~
 erfüllt!

• G ist "radial", hängt nur vom Abstand ab!

• Interpretation des Delta-Terms. $\delta(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c})$
 in G ungleiche Null
 $t-t' = \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$

Das durch die Punktladung erzeugte Potential erreicht den Ort \underline{r} erst nach der Zeit $\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$
 am Ort \underline{r}'
 \Rightarrow Störung breitet sich "nur" mit Lichtgeschwindigkeit aus!

'Retardierung' (Zerverzögerung)

Wir setzen ρ in unseren Ansatz \ominus ein

$$\begin{aligned}
 u(\underline{r}, t) &= \int d^3r' \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \rho(\underline{r}', t') \\
 &= \int d^3r' \frac{1}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|} \int_{-\infty}^t dt' \rho(\underline{r}', t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}) \\
 &= \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{4\pi |\underline{r} - \underline{r}'|}
 \end{aligned}$$

Für die elektrodynam. Potentiale gilt:

$$\begin{aligned}
 \Phi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \\
 \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}
 \end{aligned}$$

Retardierte Potentiale!

Im Integral tritt die retardierte Zeit

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c} \text{ auf!}$$

- Ebenso wie im stat. Fall sind die Integral i.A. schwer zu lösen
 \Rightarrow Näherungen $\xrightarrow{\text{z.B.}}$ Multipolentwicklung
- Die angegebenen Lösung für \underline{G} und damit für $\underline{\Phi}$ und \underline{A} gelten für System ohne Ränder im Endlichen!

In Anwesenheit solcher Ränder verwendet man dieselben Tricks wie in der Elektrostatik

$$\underline{G}(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = \frac{1}{4\pi|\underline{r} - \underline{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}\right) + F(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$$

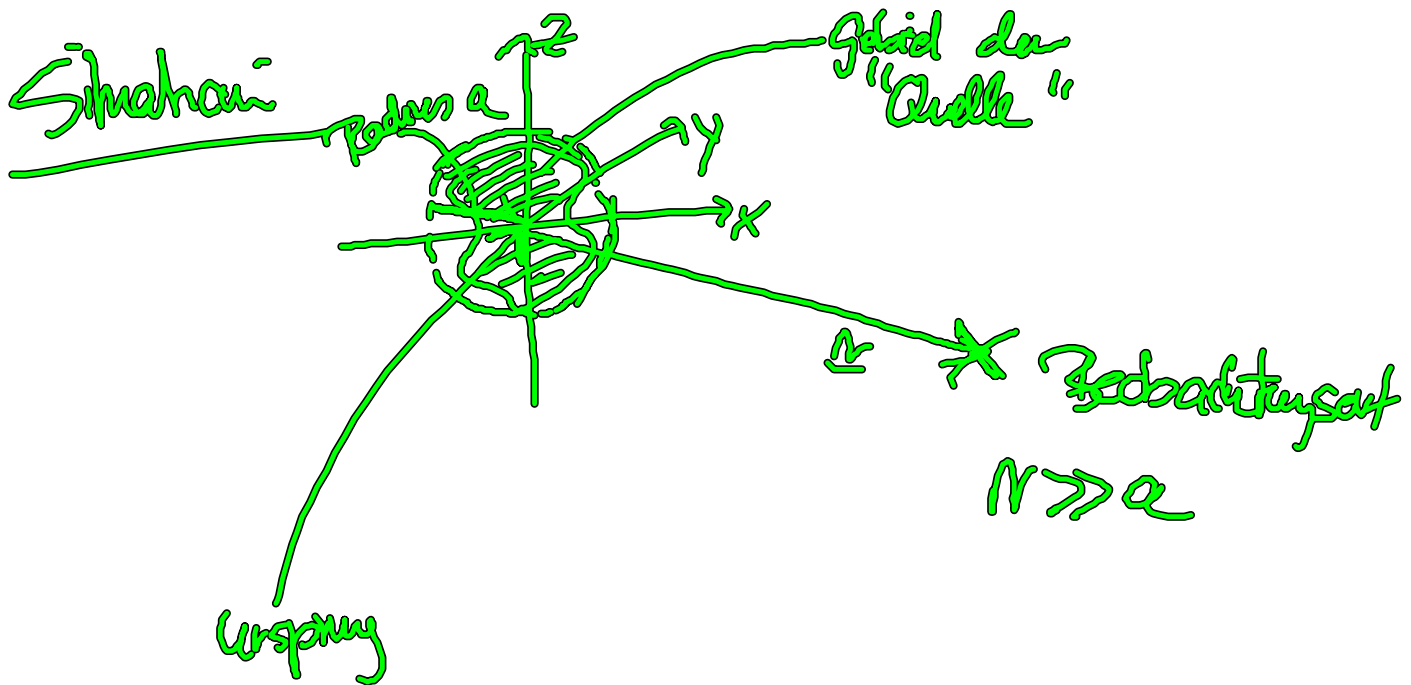
$$\text{mit } \square F(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = 0$$

- Wie immer berechnen sich die Felder

$$\text{dann aus } \underline{B} = \nabla \times \underline{A}, \quad \underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

V. 5. 2. Multipolentwicklung

Ziel. ^{näherungsweise} Berechnung des retardierten Potentials für räumlich lokalisierte, aber zeitabhängige Ladung- oder Stromverteilungen



Quelle: zeitlich oszillierende Stromdichte
 $j(\mathbf{r}', t') = j_0(\mathbf{r}') e^{i\omega t'}$

Vorgehensweise

Beach.: In der Glatzeichung gilt

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}, t) + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi}(\underline{r}, t) = 0$$

⇒ Betrachte im folgenden nur \underline{A} , denn damit sind Φ , \underline{B} , \underline{E} festgelegt!

⇒ Ausgangspunkt

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \frac{j(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \quad t_{ret} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$

Näherungen

1. Betrachte Beobachtungspunkt

mit $r \gg a \Leftrightarrow r \gg r'$ für alle r' im Geländestruktur

$$\frac{r'}{r} \ll 1$$

$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3} (\underline{r} \cdot \underline{r}') + \dots$$

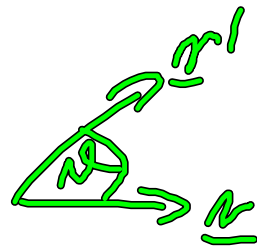
$$= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{r'}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right)$$

genau wie in der
Elektro- oder Magnetostatik!

Folgerung für die Potentiale
im Vektorpotential

$$\frac{j(\underline{r}', t_{\text{ret}})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{j(\underline{r}', t_{\text{ret}})}{r} + \frac{1}{r^3} (\underline{r} \cdot \underline{r}') j(\underline{r}', t_{\text{ret}})$$

2. Näherung im Zähler



$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$$

$$= t - \frac{1}{c} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \alpha}$$

$$= t - \frac{1}{c} r \sqrt{1 - 2 \frac{r'}{r} \cos \alpha + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}$$

$$\approx t - \frac{r}{c} \left(1 - \cos \alpha \left(\frac{r'}{r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{r'^2}{r^2}\right)\right)$$

Taylorentwicklung
von $\sqrt{1 - 2ax' + \frac{r'^2}{r^2}}$
 $x = \frac{r'}{r}$
 $\ll 1$

$$= t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r}$$

$$\Rightarrow t_{\text{ret}} \approx \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tilde{t}} + \frac{1}{c} \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r} = \tilde{t} + \Delta t$$

3. Näherung bei Strom

$$j(r', t - \frac{|r-r'|}{c}) \approx j(r', \tilde{t} + \Delta t)$$

$$\approx j(r', \tilde{t}) + \frac{\partial j(r', \tilde{t})}{\partial t} \Big|_{\Delta t=0} \Delta t$$

$$= j(r', \tilde{t}) + \frac{r \cdot r'}{rc} \frac{\partial j(r', \tilde{t})}{\partial \tilde{t}}$$

nehme an, dass
 Δt klein ist
 gegen $t - \frac{r}{c} = \tilde{t}$

Betrachte nun alle Näherungen
 zusammen:

$$\frac{j(r', r_{\text{end}})}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r} j(r', t_{\text{end}}) + \frac{1}{r^3} (r \cdot r') j(r', t_{\text{end}})$$

$$\textcircled{3} \approx \frac{1}{r} j(r', \tilde{t}) + \frac{1}{r} \frac{r \cdot r'}{rc} \frac{\partial j(r', \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \Big|_{\Delta t=0}$$

$$+ \frac{1}{r^3} (r \cdot r') j(r', \tilde{t})$$

~~$$+ \frac{1}{r^3} (r \cdot r') \frac{r \cdot r'}{rc} \frac{\partial j(r', \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} \Big|_{\Delta t=0}$$~~

enthält höhere Ordnung in $\frac{r'}{r}$!!

Damit folgt

$$\underline{A}(\underline{r}, t) \approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) + \underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t)$$

mit $\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}', t) \quad \text{mit } t = t - \frac{r}{c}$

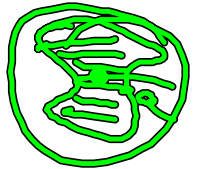
$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d^3r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c} \frac{\partial}{\partial t}\right) \underline{j}(\underline{r}', t)$$

Implikationen unserer Näherungen
hinsichtlich der retardierten Zeit

• Wir hatten angenommen

$$\Delta t = \frac{r \cdot r'}{rc} \ll \tilde{t} = t - \frac{r}{c}$$

$$\max(\Delta t) = \max\left(\frac{r \cdot r'}{rc}\right) = \max\left(\frac{r' \cos \alpha}{c}\right)$$



also haben wir im Endeffekt vorausgesetzt
 $\vec{E} \gg \frac{a}{c}$

also:

Retardierte Feld
 durch Quelle
 im Ursprung

$$\gg \frac{a}{c}$$

relative Retardierung ist klein,
 daß Quelle ausgedehnt

• Wir hatten angenommen

$$\vec{j}(\vec{r}', t) = \vec{j}_0(\vec{r}') e^{i\omega t} \quad \text{mit } \omega = ck$$

$$\Rightarrow \text{Retardierte Strom} \quad \vec{j}(\vec{r}', t_{\text{ret}}) = \vec{j}_0(\vec{r}') e^{i\omega t - i\omega \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}$$

Wir haben ersetzt (z. B. Vektor)

$$t_{\text{ret}} = \hat{t} + \Delta t$$

$$j(\alpha', t_{ret}) \approx j_0(\alpha') e^{i\omega t - i\omega \frac{r}{c} + i\frac{\omega}{c} \frac{r \cdot \alpha'}{v}}$$

$$e^{i\omega(\tilde{t} + \Delta t)}$$

Was heißt nun Δt klein??

$$\Delta t = \frac{r \cdot \alpha'}{vc}$$

Näherung
gerechtfertigt falls

$$e^{i\frac{\omega}{c} \frac{r \cdot \alpha'}{v}} \approx 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \frac{r \cdot \alpha'}{v} \ll 2\pi$$

Die linke Seite erzeugt ~~zum~~
eine Zusammenhang zu Wellenlänge
der Strahlung:

$$\frac{\omega}{c} \frac{r \cdot \alpha'}{v} = ka$$

$$\omega = ck$$

$$\Rightarrow ka \ll 2\pi$$

$$a \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda$$

man sieht
 $\lambda \gg a$
Wellenlänge der Strahlung
viel größer als
Ausdehnung der Quelle

V.5.3. Elektrische Dipolstrahlung, Hertz'scher Dipol

betrachte 1. Term in der Multipol-Entwicklung von A

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \dot{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

$$\text{mit } \tilde{t} = t - \frac{r}{c}$$

betrachte zunächst ^{Produktregel}

$$\nabla_{ri} (x_{ki} \dot{j}(\underline{r}', \tilde{t})) = x_{ki} \nabla_{ri} \dot{j}(\underline{r}', \tilde{t}) + (\nabla_{ri} x_{ki}) \cdot \dot{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

↳ k-te Komponente von j

benutze Kontinuitätsgl.

$$\nabla_{ri} \dot{j} + \dot{\rho} = 0$$

$$\nabla_{r_i} (x_{k'} j) = -x_{k'} \dot{j}(r', \tilde{t})$$

$$+ j_{k'}(r', \tilde{t})$$

Oberflächenintegral
im Unendlichen

$$\int d^3 r' \nabla_{r_i} (x_{k'} j)(r', \tilde{t}) = \int d^3 r' x_{k'} \dot{j}(r', \tilde{t})$$

⊛

= 0

da die Stromdichte
lokalisiert im Endlichen
⇒ j = 0 auf Rand

es folgt

$$\int d^3 r' j_{k'}(r', \tilde{t})$$

$$= + \int d^3 r' x_{k'} \dot{j}(r', \tilde{t})$$

~~die~~ Kombinationen sind g. bei $A^{(k)}$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(k)}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3 r' r' \dot{j}(r', \tilde{t})$$

Erinnerung: $p(t) = \int d^3 r' r' \rho(r', t)$ Def. des
Gesamtmomentums

$$\Rightarrow \dot{p}(t) = \int d^3 r' r' \dot{\rho}(r', t)$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{p} \left(\underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tau} \right)$$

Daher der Name

"elektrische Dipolstrahlung"