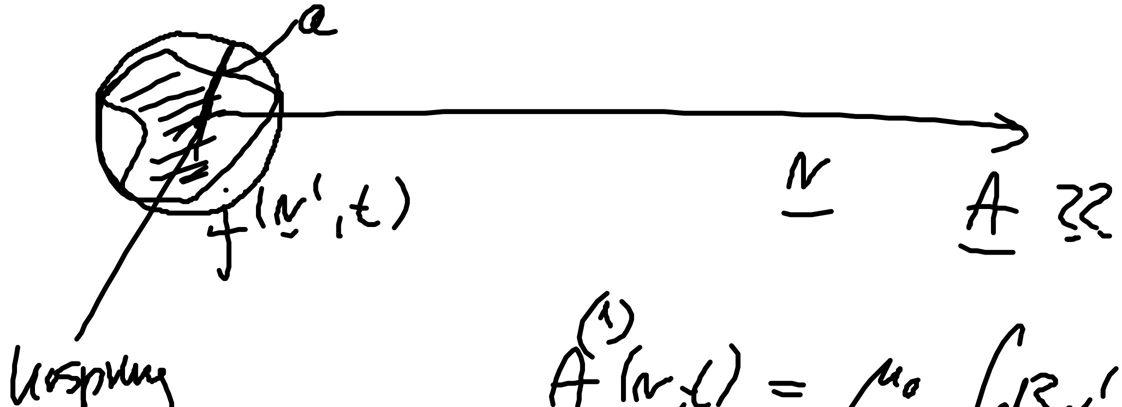


$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

dann $\phi(\underline{r},t)$ aus Lorenzeichungsbedingung

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}, \underline{B}$$

ersetze $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underset{t - \frac{r}{c}}{\underbrace{\tilde{t}}} + \overbrace{\frac{1}{c}\,\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{\underbrace{r}}}^{\Delta t}$ + Terme höherer Ordnung

maximaler Betrag a!

nehme an, daß $\Delta t \ll \tilde{t}$

$$\Rightarrow A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

man nimmt an, daß Stromdichte im Ursprung lokalisiert!

Insgesamt haben wir also 2 Näherungen:

- $r \gg a$ (wie in der Statik

$\cdot \quad \tilde{t} = t - \frac{r}{c} \gg \frac{a}{c}$

Implikation? Betrachte harmonische Strömung

$$j(r', t) = j_0(r') e^{i\omega t}$$

Wir ersetzen

$$j\left(r', t - \frac{|r - r'|}{c}\right) = j_0(r') e^{i\omega t - i\omega \frac{|r-r'|}{c}}$$

$$\approx j_0(r') e^{\underbrace{i\omega t - i\omega \frac{r}{c}}_{\text{Beitrag von } \tilde{t}} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \frac{r \cdot r'}{r}}_{\text{Beitrag von } \Delta t}}$$

Δt klein

$$e^{\frac{i\omega}{c} \frac{r \cdot r'}{r}} \approx 1$$

$$\frac{\omega}{c} \frac{r \cdot r'}{r} \approx \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k} a \ll 1 \iff ka \ll 1$$

$$a \ll k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Wellenlänge der Strömung

$\Rightarrow \boxed{\lambda \gg a}$ — Ausdehnung der Quelle

betrachte nun

$$A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

$$= \ldots = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\,\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\dot{p} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3r'\, \underline{r}'\, \rho(\underline{r}',t)$$

Dipolstrahlung!

Spezialfall: Hertz'scher Dipol

Ansatz: $\boxed{p(t) = p_0 e^{-i\omega t}}$ harmonisch schwingender Dipol

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\, p_0\, \frac{1}{r}\, e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$= -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\, p_0\, \underbrace{\frac{1}{r}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}-i\omega t}}_{\text{Kugelwelle!}} \qquad k=\frac{\omega}{c}$$

Betrag nimmt ab mit $\frac{1}{r}$

setze im Folgenden $\underline{A}^{(1)} = \underline{A}$

Berechnung des skalaren Potentials

benutze: $\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$ Produktregel!

$$-\dot{\phi}(\underline{r},t) = c^2\nabla\cdot\underline{A} = c^2\nabla\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\dot{\phi}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Integriere bzgl. Zeit

$$\phi(\underline{r},t) = \cancel{\phi^{stat}(\underline{r})}$$

Potential bei $t=t_0$ (setzt man typischerweise auf Null!)

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\overbrace{\nabla\frac{1}{r}}^{-\frac{\underline{r}}{r^3}}\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)(-1)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

1. Term in ϕ:

Abfall wie $\sim\frac{1}{r^2}$, wie das elektrostat. Potential eines Dipol

2. Term:

Abfall wie $\frac{1}{r}$

Dieser Term kommt aus der Retardierung!

Daraus die Felder

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

benutze $\nabla \times (\underline{a}\varphi) = \varphi \nabla \times \underline{a} - \underline{a} \times \nabla \varphi$

man erhält:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r}\right)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r^3}\right)$$

Bemerkungen:

- $\underline{B}$ enthält Terme mit unterschiedl. Abstandsabhängigkeit!
  - 1. Term: $\sim 1/r$
  - 2. Term $\sim 1/r^2$
- $\underline{B}$ steht immer senkrecht auf $\underline{r}$!

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\Phi(\underline{r},t) - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t)$$

man erhält:

$$\underline{E} = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$-\nabla\left(\frac{1}{r^2 c}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right) \Bigg\} \text{ aus } -\nabla\Phi$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\,\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \Big\} \text{ aus } -\dot{\underline{A}}$$

Die Ausdrücke werden sehr ~~kom~~ komplex! Obwohl wir "nur" Multipolstrahlung in niedrigster Näherung betrachten

Man diskutiert typischerweise nur Grenzfälle!

i) $a \ll r \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$

„Nahzone"

ii) $a \ll \lambda \ll r$

„Fernzone"

Wir hatten schon vorausgesetzt
$r \gg a$
$\lambda \gg a$

Diskutiere zunächst die Nahzone

Voraussetzung: $r \ll \lambda \iff kr \ll k\lambda = 2\pi$
$\iff kr \ll 1$

Folgerung

$$p\left(t - \frac{r}{c}\right) = p_0 e^{i\omega t} \underbrace{e^{-ikr}}_{\approx 1 \text{ für } kr \ll 1}$$

Hertz'scher Dipol

$$\approx p_0 e^{i\omega t} = p(t)\ !$$

In der Nahzone sind Retardierungseffekte also klein und werden daher vernachlässigt!

Folgerungen für Potentiale in der Nahzone

$$\underline{A}^{(N)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{p}(t)$$

$$\phi^{(N)}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}(t)\right)$$

unterdrücke 2. Term in ϕ, da dieser alleine von der Retardierung kommt!

<u>Felder</u>

$$\underline{B}^{(N)} = \nabla\times\underline{A}^{(N)}(\underline{r},t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\dot{\underline{p}}(t)\times\frac{\underline{r}}{r^3}\right)}_{\sim\frac{1}{r^2}\text{, und } \underline{B}\perp\underline{r}!!}$$

$$\underline{E}^{(N)}(\underline{r},t)$$

$$= -\nabla\phi^{(N)} - \dot{\underline{A}}^{(N)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{3\underline{r}\,(\underline{r}\cdot\underline{p}(t))}{r^5} - \frac{\underline{p}(t)}{r^3}\right)}_{\sim\frac{1}{r^3}}$$ instantane Dipolfeld!

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\ddot{\underline{p}}(t)$$

benutze $\omega = ck$, $kr \ll 1$

Vernachlässige den 2. Term!

$$\frac{\ddot{\underline{p}}}{r} \sim \frac{\omega^2}{r} \sim \frac{k^2}{r} \ll \frac{1}{r^3} \;!!$$

— Abstandsabh. des 1. Terms!

Das elektrische Nahfeld des Hertz'schen Dipols entspricht dem instantanen Dipolfeld!

2. Grenzfall

$$a \ll \lambda \ll r$$

"Fernzone" oder "Strahlungszone"

Folgerungen:

$$\frac{1}{c} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{i\omega}{c} p(t - \frac{r}{c})$$

benutze jetzt

$$r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$kr \gg 2\pi$$

$$\frac{\omega}{c} r \gg 2\pi \iff \frac{\omega}{c} \gg \frac{2\pi}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} p\left(t-\frac{r}{c}\right) \gg \frac{1}{r} p\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

benutze das für die Potentiale!

$\Longrightarrow$ Potentiale

$$\underline{A}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\phi^{(F)}(\underline{r},t) \simeq \frac{1}{r^2 c}\,\underline{r}\cdot\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

(lasse den 1. Term in ϕ weg wg. $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$)

<u>Felder</u>

$$\underline{B}^{(F)}(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\left(\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}^{(F)}(\underline{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\overbrace{\frac{1}{r^2}\left(\underline{r}\times\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\times\frac{\underline{r}}{r}}^{\sim\frac{1}{r}}$$

$$+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt also (bei Vernachlässigung von Terme höherer Ordnung)

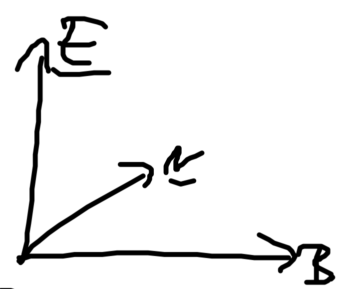
$$\boxed{\underline{E}^{(f)}(\underline{r},t) = c\, \underline{B}^{(f)}(\underline{r},t) \times \frac{\underline{r}}{r}}$$

Zusammenfassung:

- Beide Felder stehen senkrecht auf $\underline{r}$, und sie stehen senkrecht aufeinander!

$$\underline{B}^{(f)} \times \frac{\underline{r}}{r} = \frac{1}{c}\, \underline{E}^{(f)}$$

$\Rightarrow$ $\underline{B}$, $\underline{r}$ und $\underline{E}$ bilden lokal ein Rechtssystem!



Betrachte den dazugehörigen Poyntingvektor
$\Rightarrow$ Energiestromdichte, Leistung

$$\underline{S}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t) \times \underbrace{\underline{H}(\underline{r},t)}_{= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)}$$

$$\underline{S}^{(F)} = -\frac{1}{\mu_0}\,\underline{B}^{(F)} \times \underline{E}^{(F)}$$

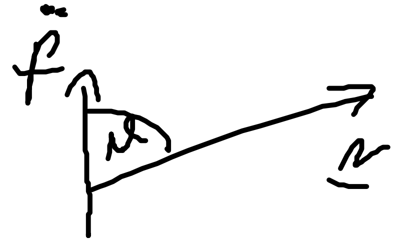
$$\text{einsetzen} \quad = -\frac{c}{\mu_0 r}\,\underbrace{\underline{B}^{(F)} \times \left(\underline{B}^{(F)} \times \underline{r}\right)}_{-\left(\underline{B}^{(F)}\cdot\underline{B}^{(F)}\right)\cdot\underline{r}}$$

$$\Rightarrow \underline{S}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{c}{\mu_0 r}\left(\underline{B}^{(F)}(\underline{r},t)\right)^2 \underline{r}$$

$$\underline{S}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{c\,\cancel{r}}{\mu_0 \cancel{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{1}{r^2}\right)^2 \left(\underline{r} \times \ddot{\underline{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)^2$$

$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\,\frac{1}{r^4}\,|\ddot{\underline{p}}|^2\, r^2 \sin^2\vartheta\, \frac{\underline{r}}{r}$$

$$\boxed{\underline{S}^{(F)} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{p}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \, \frac{\underline{r}}{r}}$$

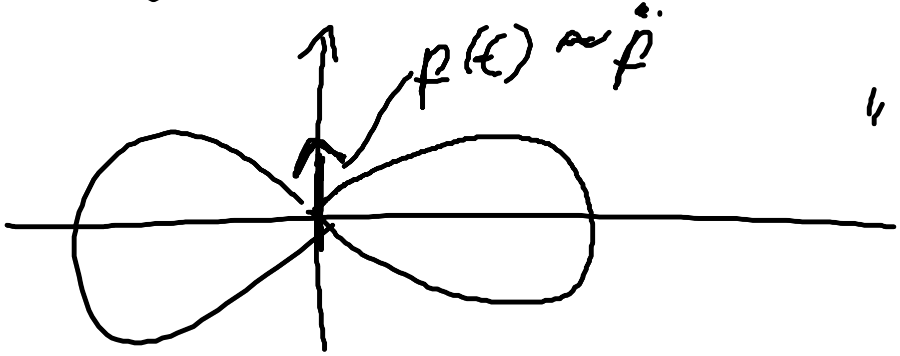


Bemerkungen.

- $\underline{S}^{(F)}$ hat die Richtung von $\frac{\underline{r}}{r}$

- Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^2}$ $\qquad$ ($p(t) = p_0 e^{i\omega t}$

- Ausgeprägte Abhängigkeit von $\vartheta \Leftrightarrow$ Winkel zwischen $\underline{r}$ und $\ddot{p} \sim p$



„Dipol-Strahlungscharakteristik"

– d.h. maximaler Energiestrom in Richtung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\perp p$

- Keine Abstrahlung für $\vartheta = 0, \pi$, d.h. $\parallel \underline{p}$

spezielle
harmonische Schwingung (Hertz'scher Dipol)

$$\ddot{\underline{p}}(t) = \omega^2 \underline{p}(t)$$

$$\Rightarrow |\ddot{\underline{p}}|^2 = \omega^4 p_0^2$$

$$\Rightarrow \underline{S}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \omega^4 p_0^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$

Frequenzabhängigkeit $\sim \omega^4$

Betrachte die gesamte
Strahlungsleistung des Hertz'schen Dipols

$$P_S = \int d\underline{f} \cdot \underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\, \omega^4 p_0^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, \frac{\sin^2\vartheta\, R^2}{R^2}}_{\frac{8\pi}{3}}$$

Kugel mit Radius R, die den Dipol einschliesst!

$$\Rightarrow \boxed{P_S = \frac{\mu_0}{6\pi c}\, \omega^4 p_0^2}$$