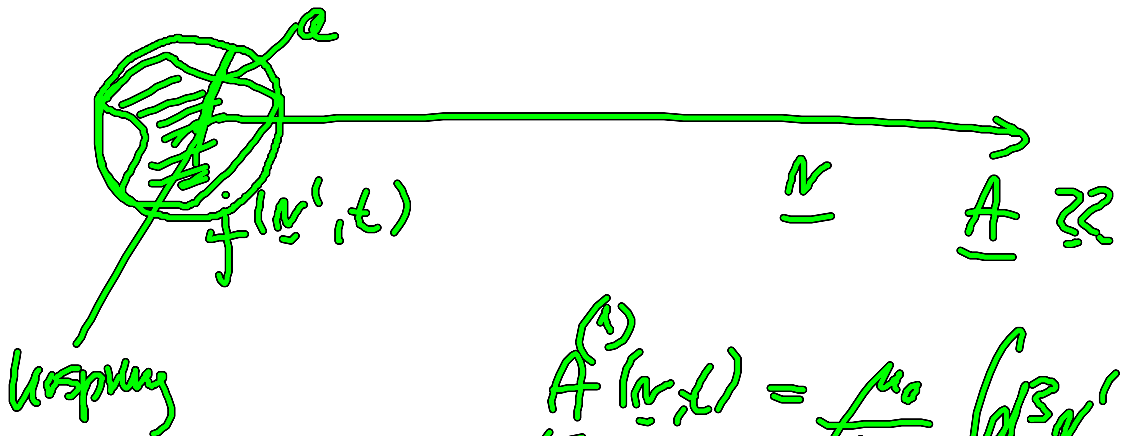


$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

dann $\phi(\underline{r},t)$ aus Lorenzeichungbedingung

$$\nabla\cdot\underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}, \underline{B}$$

ersetze $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underset{t-\frac{r}{c}}{\tilde{t}} + \overbrace{\frac{1}{c}\underbrace{\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}}_{\text{maximaler Betrag } a!}}^{\Delta t}$ + Terme höherer Ordnung

nehme an, dass $\Delta t \ll \tilde{t}$

$$\Rightarrow A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r}\int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

man nimmt an, dass Stromdichte im Ursprung lokalisiert!

Insgesamt haben wir also 2 Näherungen:

- $r \gg a$ (wie in der Statik

$\tilde{t} = t - \frac{r}{c} \gg \frac{a}{c}$

Implikation? Betrachte harmonische Störung

$j(\mathbf{r}', t) = j_0(\mathbf{r}') e^{i\omega t}$

Wir ersetzen

$$j\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) = j_0(\mathbf{r}') e^{i\omega t - i\omega \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}}$$

$$\approx j_0(\mathbf{r}') e^{\underbrace{i\omega t - i\omega \frac{r}{c}}_{\text{Beitrag von } \tilde{t}} + \underbrace{\frac{i\omega}{c} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}}_{\text{Beitrag von } \Delta t}}$$

Δt klein

$$e^{\frac{i\omega}{c} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}} \approx 1$$

$$\frac{\omega}{c} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r} \approx \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k} a \ll 1 \iff ka \ll 1$$

$$a \ll k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

Wellenlänge der Störung

$\Rightarrow \boxed{\lambda \gg a}$ — Ausdehnung der Quelle

betrachte nun

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

$$= \dots = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\,\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\dot{\underline{p}} = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3r'\, \underline{r}'\, \rho(\underline{r}',t)$$

Dipolstrahlung!

Spezialfall: Hertz'scher Dipol

Ansatz: $\boxed{\underline{p}(t) = \underline{p}_0 e^{-i\omega t}}$ harmonisch schwingender Dipol

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\underline{p}_0\frac{1}{r}e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$= -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\underline{p}_0\underbrace{\frac{1}{r}e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}-i\omega t}}_{\text{Kugelwelle!}} \qquad k=\frac{\omega}{c}$$

Betrag nimmt ab mit $\frac{1}{r}$

setze im Folgenden $\underline{A}^{(1)} = \underline{A}$

Berechnung des skalaren Potentials

benutze: $\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$ Produktregel!

$$-\dot{\phi}(\underline{r},t) = c^2\nabla\cdot\underline{A} = c^2\nabla\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\dot{\phi}(\underline{r},t)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Integriere bzgl. Zeit

$$\phi(\underline{r},t) = \cancel{\phi^{stat}(\underline{r})}$$

Potential bei $t = t_0$ (setzt man typischerweise auf Null!)

$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\nabla\frac{1}{r}}_{-\frac{\underline{r}}{r^3}}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \; FN$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{rc}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{\underline{r}}{r}\right)$$

1\. Term in ϕ:

Abfall wie $\sim \frac{1}{r^2}$, wie das elektrostat. Potential eines Dipols

2. Term:

Abfall wie $\frac{1}{r}$

Dieser Term kommt aus der Retardierung!

Daraus die Felder

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

benutze $\nabla \times (\underline{a}\,\varphi) = \varphi \nabla \times \underline{a} - \underline{a} \times \nabla \varphi$

man erhält:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r}\right)$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r^3}\right)$$

Bemerkungen:

- $\underline{B}$ enthält Terme mit unterschiedl. Abstandsabhängigkeit!
  - 1. Term: $\sim \frac{1}{r}$
  - 2. Term $\sim \frac{1}{r^2}$
- $\underline{B}$ steht immer senkrecht auf $\underline{r}$!

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\bar{\nabla}\Phi(\underline{r},t) - \underline{\dot{A}}(\underline{r},t)$$

man erhält:

$$\left.\begin{aligned}\underline{E} = &-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\underline{r}\cdot \underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\\ &-\nabla\left(\frac{1}{r^2 c}\,\underline{r}\cdot\underline{\dot{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\end{aligned}\right\}\text{aus } -\nabla\Phi$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\underline{\ddot{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad \Big\}\text{ aus } -\underline{\dot{A}}$$

Die Ausdrücke werden sehr ~~kom~~ komplex! Obwohl wir "nur" Multipolentwicklung in niedrigster Näherung betrachten

Man diskutiert typischerweise nur Grenzfälle!

i) $a \ll r \ll \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$

„Nahzone"

ii) $a \ll \lambda \ll r$

„Fernzone"

Wir hatten schon vorausgesetzt
$r \gg a$
$\lambda \gg a$

Diskutiere zunächst die Nahzone

Voraussetzung: $r \ll \lambda \iff kr \ll k\lambda = 2\pi$
$\iff kr \ll 1$

Folgerung

$$p\left(t - \frac{r}{c}\right) = p_0 \, e^{i\omega t} \underbrace{e^{-ikr}}_{\substack{\approx 1 \\ \text{für } kr \ll 1}}$$

Hertz'scher Dipol

$$\approx p_0 \, e^{i\omega t} = p(t) \; !$$

In der Nahzone sind Retardierungseffekte also klein und werden daher vernachlässigt!

Folgerungen für Potentiale in der Nahzone

$$\underline{A}^{(N)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(t)$$

$$\phi^{(N)}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}(t)\right)$$

unterdrücke 2. Term in ϕ, da dieser allein von der Retardierung kommt!

Felder

$$\underline{B}^{(N)} = \nabla \times \underline{A}^{(N)}(\underline{r},t) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\dot{\underline{p}}(t)\times\frac{\underline{r}}{r^3}\right)}_{\sim \frac{1}{r^2}}$$

, und $\underline{B} \perp \underline{r}$!!

$$\underline{E}^{(N)}(\underline{r},t)$$

$$= -\nabla\phi^{(N)} - \dot{\underline{A}}^{(N)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{3\,\underline{r}\,(\underline{r}\cdot\underline{p}(t))}{r^5} - \frac{\underline{p}(t)}{r^3}\right)}_{\sim \frac{1}{r^3}}$$

instantanes Dipolfeld!

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\ddot{\underline{p}}(t)$$

Vernachlässige den 2. Term!

benutze $\omega = ck$, $kr \ll 1$

$$\frac{\ddot{p}}{r} \sim \frac{\omega^2}{r} \sim \frac{k^2}{r} \ll \frac{1}{r^3} \;!!$$

Abstandsabh. des 1. Terms!

Das elektrische Nahfeld des Hertz'schen Dipols entspricht dem instantanen Dipolfeld!

2. Grenzfall

$$a \ll \lambda \ll r$$

"Fernzone" oder "Strahlungszone"

Folgerungen:

$$\frac{1}{c}\dot{p}(t-\frac{r}{c}) = -\frac{i\omega}{c}p(t-\frac{r}{c})$$

benutze jetzt

$$r \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$kr \gg 2\pi$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\frac{\omega}{c}r \gg 2\pi \Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \gg \frac{2\pi}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} p\left(t-\frac{r}{c}\right) \gg \frac{1}{r} p\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

benutze das für die Potentiale!

$\Rightarrow$ Potentiale

$$\underline{A}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\phi^{(F)}(\underline{r},t) \simeq \frac{1}{r^2 c} \underline{r} \cdot \dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

(lasse den 1. Term in ϕ weg wg. $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$)

Felder

$$\underline{B}^{(F)}(\underline{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r^2}\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \underline{r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}^{(F)}(\underline{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{1}{r^2}\left(\underline{r} \times \ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \times \frac{\underline{r}}{r}}_{\sim \frac{1}{r}}$$

$$+ \quad \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Es gilt also (bei Vernachlässigung von Terme höherer Ordnung)

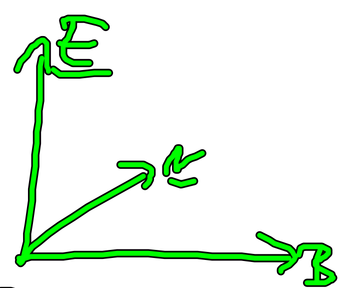
$$\boxed{\underline{E}^{(F)}(\underline{r},t) = c\, \underline{B}^{(F)}(\underline{r},t) \times \frac{\underline{r}}{r}}$$

Zusammenfassung:

- Beide Felder stehen senkrecht auf $\underline{r}$, und sie stehen senkrecht aufeinander!

$$\underline{B}^{(F)} \times \frac{\underline{r}}{r} = \frac{1}{c}\, \underline{E}^{(F)}$$

$\Rightarrow$ $\underline{B}$, $\underline{r}$ und $\underline{E}$ bilden lokal ein Rechtssystem!



Betrachte den dazugehörigen Poyntingvektor

$\Rightarrow$ Energiestromdichte, Leistung

$$\underline{S}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t) \times \underline{H}(\underline{r},t)$$

$$\underline{H}(\underline{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)$$

$$\underline{S}^{(F)} = -\frac{1}{\mu_0}\underline{B}^{(F)} \times \underline{E}^{(F)}$$

$$= -\frac{c}{\mu_0 r}\underbrace{\underline{B}^{(F)} \times \left(\underline{B}^{(F)} \times \underline{r}\right)}_{-\left(\underline{B}^{(F)}\cdot\underline{B}^{(F)}\right)\cdot\underline{r}}$$

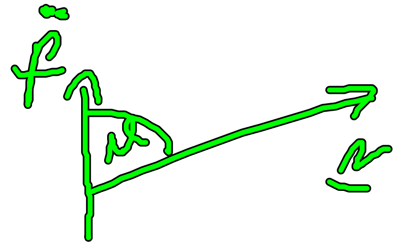
einsetzen

$$\Rightarrow \underline{S}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{c}{\mu_0 r}\left(\underline{B}^{(F)}(\underline{r},t)\right)^2 \underline{r}$$

$$\underline{S}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{c}{\mu_0 r}\,\underline{r}\left(\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\right)^2\left(\underline{r}\times\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)^2$$

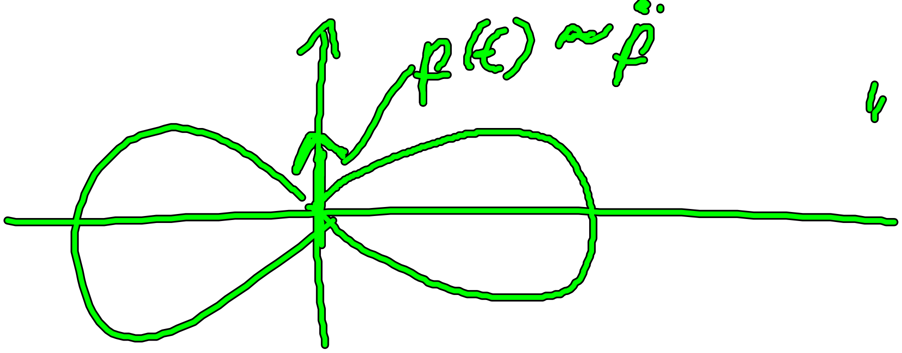
$$= \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\frac{1}{r^4}|\ddot{\underline{p}}|^2 r^2 \sin^2\vartheta\,\frac{\underline{r}}{r}$$

$$\boxed{\underline{S}^{(F)} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} |\ddot{\underline{p}}|^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \, \frac{\underline{r}}{r}}$$



Bemerkungen:

- $\underline{S}^{(F)}$ hat die Richtung von $\frac{\underline{r}}{r}$
- Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^2}$ $\quad$ ($p(t) = p_0 e^{i\omega t}$
- Ausgeprägte Abhängigkeit von $\vartheta \Leftrightarrow$ Winkel zwischen $\underline{r}$ und $\ddot{\underline{p}} \sim \underline{p}$



„Dipol-Strahlungscharakteristik"

- d.h. maximaler Energiestrom in Richtung $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\perp \underline{p}$

- Keine Abstrahlung für $\vartheta = 0, \pi$, d.h. $\parallel \vec{p}$

Speziell
harmonische Schwingung (Hertz'scher Dipol)

$$\ddot{\vec{p}}(t) = \omega^2 \vec{p}(t)$$

$$\Rightarrow |\ddot{\vec{p}}|^2 = \omega^4 p_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S}^{(F)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c} \omega^4 p_0^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \frac{\underline{r}}{r}$$

Frequenzabhängigkeit $\sim \omega^4$

Betrachte die gesamte
Strahlungsleistung des Hertz'schen Dipols

$$P_S = \oint d\underline{f} \cdot \underline{S} = \frac{\mu_0}{(4\pi)^2 c}\, \omega^4 p_0^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, \frac{\sin^2\vartheta\, R^2}{R^2}}_{\frac{8\pi}{3}}$$

(Kugel mit Radius R, die den Dipol einschliesst!)

$$\Rightarrow \boxed{P_S = \frac{\mu_0}{6\pi c}\, \omega^4 p_0^2}$$