VI. Materie in elektrischen und magnetischen Feldern

Bisher:
„freie" Ladungen und Ströme als Quellen der elektrodynamischen Felder!

Beispiele:
frei bewegliche Elektronen in Metall

"frei": Bewegung in äußeren Feldern ist möglich
Lorentzkraft: $\underline{F} = q\underline{E} + q\underline{v} \times \underline{B}$

"frei" impliziert auch: wir kennen die zugehörige $\rho(\underline{r},t)$ $\underline{j}(\underline{r},t)$
("extern kontrollierbar")

~~In Mat~~
In Materie gibt es noch andere, nicht extern kontrollierbare Quellen elektromagnetischer Felder!

VI. 1. Polarisation, dielektrische Verschiebung in Materie

Betrachte Isolator $\Longleftrightarrow$ Material ohne ~~freie~~ frei bewegliche Ladungsträger

aber: es gibt sog. "gebundene" Ladungen

keine Netto-Ladung

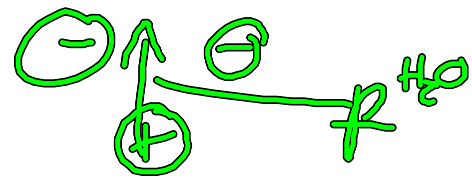
Beispiel: Ionenkristall (NaCl), reines Wasser (nur H_2O-Moleküle)

Betrachte 2 Fälle

$\underline{p}_i$ ist schon ohne ein äußeres $\underline{E}$-Feld vorhanden!

a) Material enthält permanente elektrische Dipole $\underline{p}_i$ $(i = 1, \dots, N)$

Beispiel: Wassermolekül



In Anwesenheit eines äußeren (durch externe Ladungen erzeugten) elektr. Feld werden die $\underline{p}_i$ vorzugsweise parallel zum Feld orientiert!

zugehörige Energie $W = -\underline{p}_i \cdot \underline{E}^{\text{extern}}$

→ "Orientierungspolarisation"

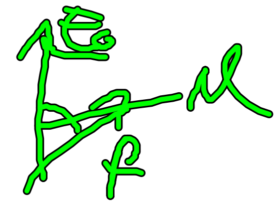
abhängig von der Temperatur
(und auch der Dichte)

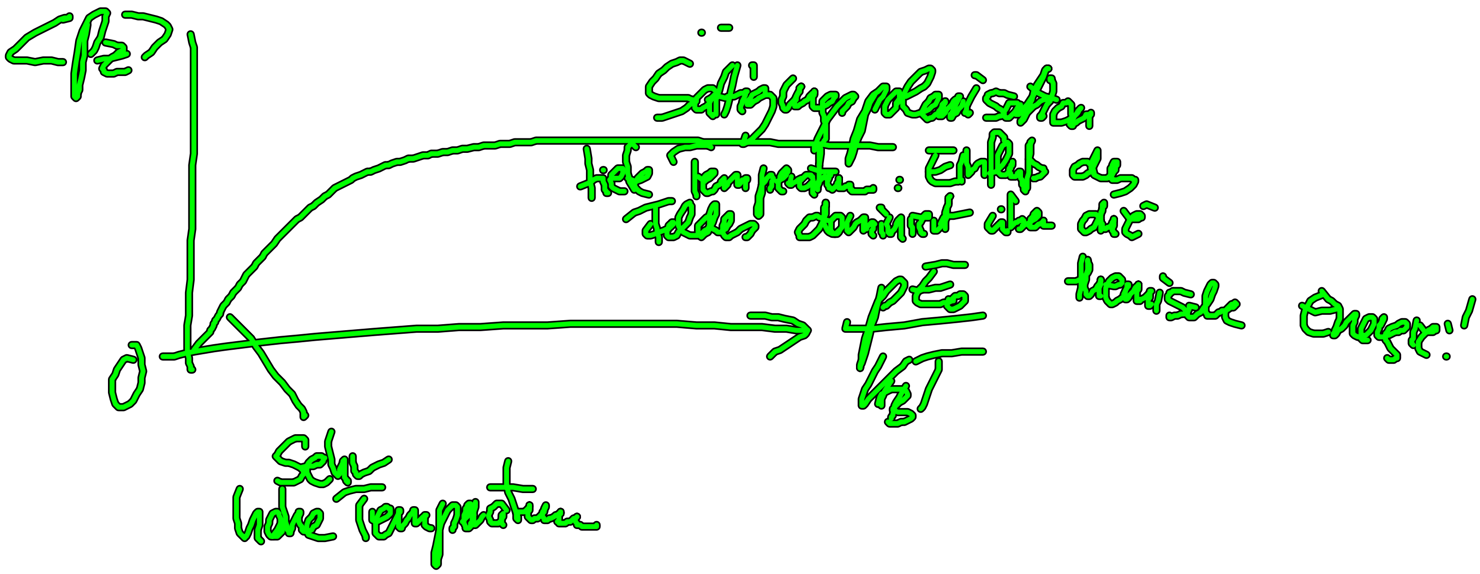
$$\vec{E}^{\text{extern}} = E_0 \, \hat{e}_z$$

$$\langle (\vec{p})_z \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\vec{p}_i)_z \right\rangle \sim \int d\vartheta \, \cos\vartheta \; \underbrace{e^{-\cos\vartheta \frac{pE_0}{k_B T}}}_{\text{Boltzmann-Faktor}}$$

mittlere Ausrichtung entlang des Feldes

Integral über die Winkel



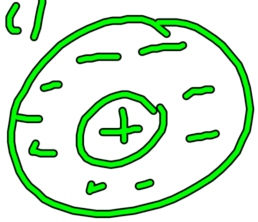


b) In Materialien, bei denen die Teilchen <u>keine</u> permanente Dipolmomente haben:

Teilchen werden durch externes Felder „polarisiert"

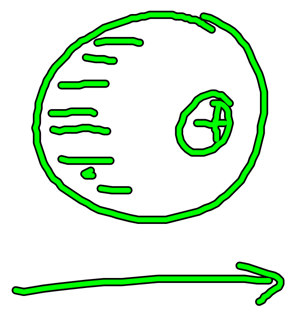
$\Rightarrow$ die Teilchen erhalten ein „induzierte" Dipolmoment

Atom i)



$\underline{E}^{extern} = 0$

$p_i = 0$

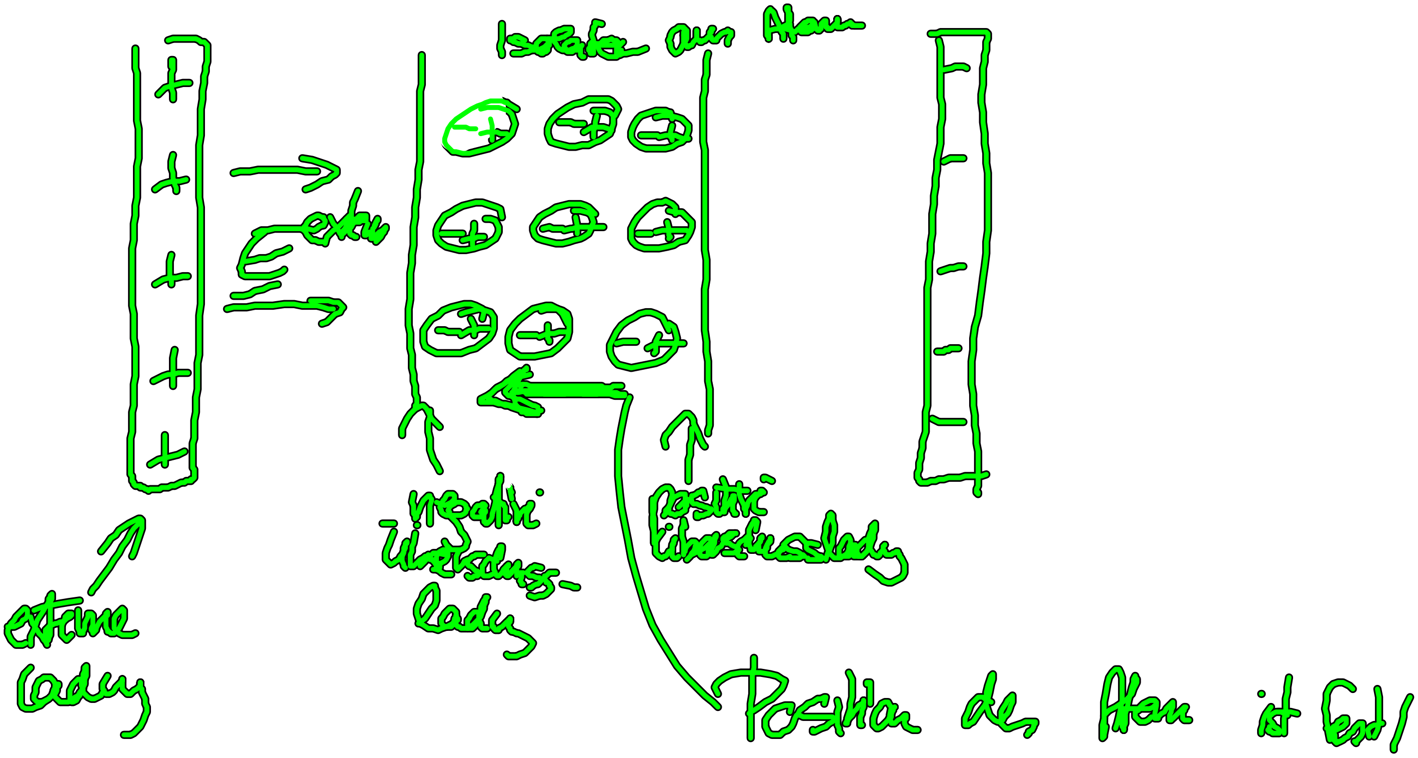


$\underline{E}^{extern}$

$p_i^{induziert} \neq 0$

Trennung der positiven und negativen Ladungsschwerpunkte!

Betrachte ein makroskopisches Volumen (d.h. es sind viele Teilchen darin!) des Isolators im externen $\underline{E}$-Feld



Es entstehen Überschussladungen an der Grenzfläche des Isolators

Diese erzeugen im Inneren des Isolators ein Zusatzfeld $\vec{E}_p$

<u>Beachte:</u>

Zusatzfeld $\vec{E}_p$ ist antiparallel zum externen Feld!

Man nennt die Überschussladungen (Nettoladungen) "Polarisationsladungen" $\rho_p(\underline{r},t)$

ρ_p ist zu unterscheiden von den externen Ladungen, die $\underline{E}^{extern}$ erzeugen

$\rho_{ext}(\underline{r},t)$

Gesamtfeld im Isolator

$$\underline{E} = \underline{E}^{extern} + \underline{E}_p$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot \underline{E}^{extern} + \nabla \cdot \underline{E}_p$$

Ansatz: $\nabla \cdot \underline{E}_p = \frac{\rho_p(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$

(analog zu $\nabla \cdot \underline{E}^{extern} = \frac{\rho_{ext}(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$)

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{ext} + \rho_p\right)$$

definiere noch die makroskop. Polarisation

$$\underline{P}(\underline{r},t) = -\varepsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{P}(\underline{r},t) = -\rho_p(\underline{r},t)$$

kombiniere alles:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \underline{E}) = \rho_{ext} + \rho_p = \rho_{ext} - \nabla \cdot \underline{P}$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \rho_{ext}} \quad (*)$$

Definiere nun die dielektr. Verschiebung

$$\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t)$$

aus (*)

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t) = \rho^{ext}(\underline{r},t)}$$

bekannte Maxwellgleichung !!

Merke:
Auf der rechten Seite dieser Maxwellgleichungen treten nun noch die extern kontrollierbaren (freien) Ladungen

auf

- die Polarisationsbeiträge sind in $\underline{D}$ bzw. $\underline{P}$ enthalten!

($\underline{P}$ ist natürlich Null im Vakuum!)

Weitere Bemerkungen

i) $\nabla \cdot \underline{P} = -\rho_P$

$$\underbrace{\oint}_{\text{geschlossene Oberfläche}} d\underline{F} \cdot \underbrace{\underline{P}}_{\text{Feld der Polarisation}} = \int_{V_F} dV\, \nabla \cdot \underline{P} = -\int_{V_F} dV \underbrace{\rho_P}_{\text{Netto-Polarisations-ladung}}$$

$\Rightarrow$ Möglichkeit, bei bekannter Polarisations-Ladungsdichte ρ_P die Polarisation $\underline{P}$ und davon $\underline{E}_p = -\varepsilon_0^{-1} \underline{P}$ zu berechnen!

(ii) Die Größen $\underline{P}(\underline{r},t)$, $\rho(\underline{r},t)$ haben in Materie immer nur gemittelten Charakter!

Hintergrund:
eine mikroskopische Betrachtung ist gar nicht möglich aufgrund der Vielzahl von Teilchen!
(typ. 10^{23} pro cm^3)

→ typischer Mittelungsausdruck

$$\rho(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V} \int d^3s \, \rho_{mikro}(\underline{r}+\underline{s},t)$$

"makroskop." Ladungsdichte

$$\rho_{mikro}(\underline{r},t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$

analog:

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V} \int d^3s \, \underline{P}_{mikro}(\underline{r}+\underline{s},t)$$

makroskop. Polarisation

$$\underline{P}_{mikro} = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i(t) \, \delta(\underline{r}+\underline{s} - \underline{r}_i(t))$$

← mikroskop. Dipole

Schließlich

Makroskop. skalares Potential $\Phi(\underline{r},t)$
(in der Lorentzeichung)

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho_p(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

auch hier: Anteil der Polarisations-ladungen

Φ erfüllt:

$$\Box\,\Phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_p)$$

daraus $\underline{E} = -\nabla\Phi - \dot{\underline{A}}$

Die Vertauschbarkeit der Mittelungsprozesse mit den räuml./zeitl. Ableitungen in der

Maxwell-Gl. kann man beweisen!

VI.2. Magnetisierung, Magnetfeld in Materie

In Materie gibt es außer dem Strom, der aus freien Ladungen besteht, noch weitere Ströme.

$$\underline{j}^{total}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{j}(\underline{r},t)}_{\text{"freier Strom"}} + \underbrace{\underbrace{\underline{j}_{mag}(\underline{r},t)}_{\text{Magnetisierungs-strom}} + \underbrace{\underline{j}_P(\underline{r},t)}_{\text{Polarisations-strom}}}_{\text{gibt es nur in Materie!}}$$

entsprechend das Vektorpotential

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\left(\underline{j}(\underline{r}',t_{ret}) + \underline{j}_{mag}(\underline{r}',t_{ret}) + \underline{j}_P(\underline{r}',t_{ret})\right)$$

Zum "Polarisationsbeitrag".

Ansatz: $\underline{j}_P(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(\underline{r},t)$ (gemittelt!)

Kombiniere dies mit $\nabla \cdot \underline{P}(r,t) = -\rho_p(r,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_p(\underline{r},t) = -\nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(r,t)$$

$$= -\nabla \cdot j_p(r,t)$$

$$\boxed{\dot{\rho}_p + \nabla \cdot \hat{j}_p = 0}$$ Kontinuitätsgleichung!

$j_p = 0$ für $\dot{\underline{P}} = 0$

nur relevant bei dynamischen Vorgängen!

Zum Magnetisierungsbeitrag

Material besteht aus Atomen, in denen bewegen sich Elektronen um den Kern

$\Rightarrow$ mikroskop. Kreisströme

$\Rightarrow$ mikroskop. magnetische Momente

Diese sind permanent!

* In einem äußeren Magnetfeld $\underline{B}^{extern}$ richten sich diese magnet. Dipole aus (in Konkurrenz mit thermischer Bewegung!)

$$W = -\underline{m} \cdot \underline{B}^{extern}$$

$\rightarrow$ das führt zu einer <u>mittleren Ausrichtung</u>!