

typische Materialbeziehung:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \begin{matrix} \text{Dipol} \\ \text{momenten} \end{matrix}$$

die "Suszeptibilität
& Antwortfunktion"

$$\chi_e = 1 + \epsilon$$

↳ Dipolmoment's
Koeffizient

(allg.: $\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \int d\underline{r}' \chi_e(\underline{r} - \underline{r}', t - t') \underline{E}(\underline{r}', t')$)

Ziel: Einfaches mikroskop. Modell
für $\chi_e = 1 + \epsilon$ (statisch)

Betrachte nun 1 Atom ohne permanentes Dipolmoment!
aber: Externes Feld kann Dipolmoment induzieren!



ohne Feld



Ladungstrennung

→ induziertes Dipol.

Wir hatten bereits:

Newton'sche Bewegungsgl. für den Kern

$$m_N \ddot{r}_N = F_N + Q_N \underline{E}^{\text{extern}}$$

↳ Kraft durch die Elektronen!

$$Q_N = Ze$$

↳ Kernladungszahl

$$F_N = Q_N \underline{E}_e(r_N) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (r_N - r_e)$$

Feld, das die Elektronen produziert!

Dabei R : Radius des Nukleus

r_e : Schwerpunkt der negativen Ladung

(Annahme: homogen geladene Kugel!)

$$F_N = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (\text{mit } r = r_N - r_e)$$

linear in r !

analoge Gl. für Elektronen:

$$\underbrace{Zm_e}_{\text{Masse}} \ddot{r}_e = \dots = F_e + Q_e \underline{E}^{\text{extern}}$$

↳ $= -F_N$

Nehme, dass $m_N \gg Zm_e$

Gleichung kombinieren:

⇒

$$\ddot{\underline{r}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \underline{r} + \frac{Ze}{Zm_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

Führe ein: $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

Das ist ein harmonischer Oszillator

Stationärer Zustand: $\dot{\underline{r}} = 0$, $\dot{\underline{r}} = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$\underline{r}_H - \underline{r}_e$

gleiche Wichtposition der Ladungsschwerpunkte
relativ zueinander

Zugehöriges (durch das Feld induziertes) Dipolmoment

$$p = \text{Ladung} \times \underline{N}$$

$$= Ze_0 \underline{N}$$

(Dimension Ladung \times At)

$$p = \int dV \rho(\underline{r}) \cdot \underline{1} \quad \text{(Ladungsdichte)}$$

$$p = Ze_0 \frac{e_0}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\approx 4\pi R^3 \epsilon_0 \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}$$

definieren die "mikroskopische Polarisierbarkeit" des Atoms

$$\alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 4\pi R^3 = 3 V_{\text{Atom}}$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \epsilon_0 \alpha \underline{E}^{\text{extern}}}$$

Verallgemeinern

für viele (nicht wechselwirkende) Atome

→ Teilchendichte

$$\underline{P} = n p = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{extern}}$$

makroskop.
Polarisation

Konsistent mit unserer
früheren Definition.

frei:
 $n = \frac{N}{\Delta V}$

$$f_i = p$$

$$\underline{P} = \frac{1}{\Delta V} \int d\underline{s} \underline{P}_{\text{mikro}}(\underline{r}+\underline{s})$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=1}^N \sum_{\underline{s} \in \Delta V} f_i d(\underline{r}+\underline{s})$$

Normal

$$\underline{P} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{ext}}$$

Erinnerung:

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

Beachte aber:

es gibt nicht unmittelbar $\chi_e = n\alpha$,
denn $\underline{E} \neq \underline{E}^{\text{ext}}$

(makroskopisches Elektr.
Feld im Inneren des Materiekörpers)

Frage:

Wie hängt $\underline{E}^{\text{extern}}$ und \underline{E}
Zusammen?

Ansatz (Lorentz)

$$\underline{E}^{\text{lokal}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \underbrace{\underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) - \underline{E}^{\text{P}}(\underline{r})}_{\text{Korrektur}}$$



Identifiziere zunächst: $\underline{E}^{\text{lokal}}(\underline{r}) = \underline{E}^{\text{extern}}(\underline{r})$

\Leftrightarrow Feld, was in diese Berechnung als
mithr. Dipol einfallt
in unserer vorherige
Überlegung

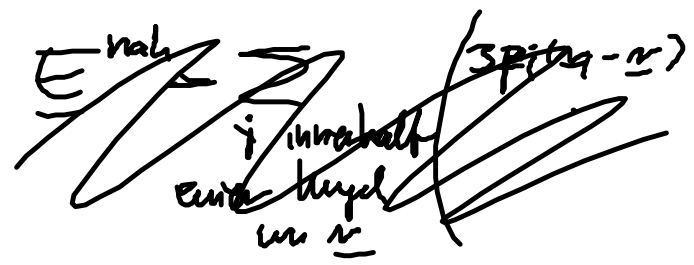
$\underline{E}^{\text{nah}}$: Beitrag der (induzierten oder
permanenten) Dipole in einer
kugelförmigen Umgebung von \underline{r}

— hängt ~~ab~~ ab von der
 mikrostr. Konfiguration der
 Nachbarmoleküle

E^P : Feld aus einer Kontinuumsapproximation,
 in welche nur die Polarisierbarkeit der Kugel
 eingeht:

Man "findet":

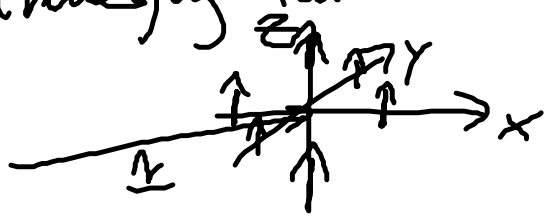
 $E^{nah} \approx 0$



in vielen Fällen, zumindest für symmetrische
 Konfigurationen

$$E^{nah} = \sum_{i \text{ innerhalb der Kugel}} \left(\frac{3 p_i (r_i - r)(r_i - r)}{4\pi \epsilon_0 (r_i - r)^3} - \frac{1 p_i}{4\pi \epsilon_0 (r_i - r)^3} \right)$$

Überlegung für ein einfaches kubisches Gitter



$$E^{nah}(r) = 0$$

Für \underline{E}^P findet man (hier durch
Herleitung)

$$\underline{E}^P = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

$\hat{=}$ Feld im Inneren einer homogen
polarisierten Kugel

(beachte: Das Feld wird gegen
die Polarisation gerichtet)



Einsetzen in den Gauß-Ansatz

$$\begin{aligned}\underline{E}^{\text{total}}(r) &= \underline{E}(r) + \cancel{\underline{E}^{\text{ind}}(r)} - \underline{E}^P \\ &= \underline{E}(r) + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad \otimes\end{aligned}$$

Kombiniere dies mit dem vorherigen Ergebnis

$$\underline{P} = \kappa \varepsilon_0 \underline{E} \quad (1)$$

und mit der Materialgleichung

$$\underline{P} = \chi_e \varepsilon_0 \underline{E} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \varepsilon_0 \kappa \underline{E} \left(\underline{E} + \frac{1}{3} \underline{P} \right)$$

$$\underline{P} \left(1 - \frac{\kappa \chi_e}{3} \right) = \varepsilon_0 \kappa \chi_e \underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P} = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa \chi_e}{1 - \frac{\kappa \chi_e}{3}} \right) \underline{E}$$

$$\stackrel{!}{=} \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

$$\chi_e = \frac{n_k}{1 - \frac{\alpha n}{3}}$$

oder

$$n_k = \frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}} = 3 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$$

$$= \epsilon + 1$$

Formel von Clausius-Mosotti (1850)

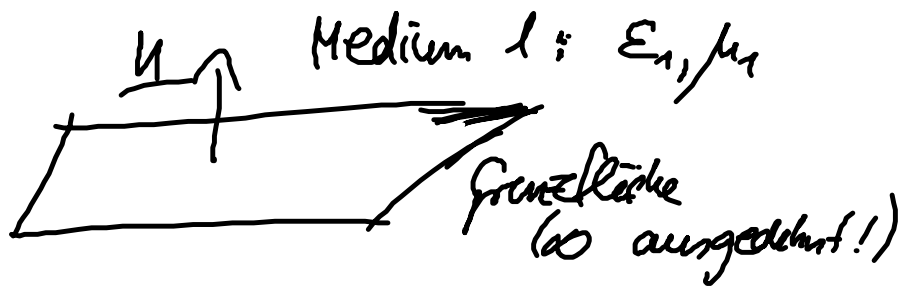
Konkurrenz mit klassischer Polarizierbarkeit (α)
mit makroskopischer Antwortfunktion!

Bemerkung: ~~Formel~~ χ_e kann divergieren für $\frac{\alpha n}{3} \rightarrow 1$
"Polarisationskatastrophe"
passiert schon beim Beispiel Wasser unter Normalbedingungen

Das zeigt, dass die
Clausius-Mosotti-Formel
falsch wird für hochkonzentrierte Systeme
denn wir hatten nicht wechselwirkende
Teilchen angenommen!

VI. 5. Feldverhalten an Grenzflächen

Frage: Welche Randbedingungen müssen die elektrodyn. Felder an ~~den~~ Grenzflächen zwischen ~~zwei~~ zwei Medien erfüllen?

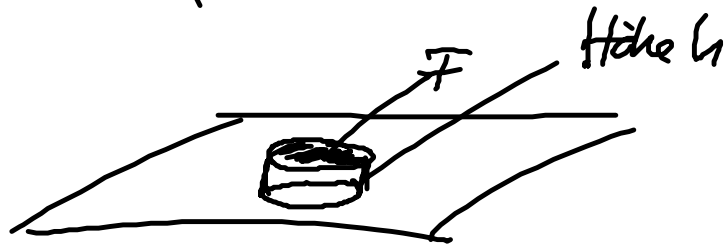


$$\chi_e = 1 + \epsilon$$
$$\chi_m = 1 + \mu$$

- ① $\nabla \cdot \underline{B} = 0$
- ② $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$
- ③ $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$
- ④ $\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$

Integriere ① und ② über ein

Kleinem Volumen (Zylinder), das die
Grenzfläche einschließt



aus Interesse am Ende:

- F so klein, dass die Felder darauf als
konstant angenommen werden können
- Höhe $h \rightarrow 0$

aus ①

$$\int_{\text{Zyl.}} \text{div } \underline{F} \cdot \underline{B} = \textcircled{1} = \int_{F_V \text{ Oberfläche des Zylinders}} \underline{dF} \cdot \underline{B}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{B} = \int_{\overline{F}} d\underline{F} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0$$

Nur Ober- und Unterfläche tragen bei!

$$\Rightarrow (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0$$

d.h. die Normalkomponente von \underline{B} verhält sich stetig!

analog aus ② $\underline{P} \cdot \underline{D} = \rho$

$$\int_{\text{Zyl}} dV \underline{P} \cdot \underline{D} = \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{D} \stackrel{\textcircled{2}}{=} \int dV \rho$$

$$\int_{\overline{F}} d\underline{F} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int dV \rho$$

Annahme:

bei $z=0$

Grenzfläche trägt eine Flächenladungsdichte σ

$$\rho(\underline{r}) = \sigma(x, y) \delta(z)$$

Grenzfläche ist die x - y -Ebene

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{Zyl.}} dV \rho(x) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int dF \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G(x, y) dz \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int dF G(x, y) = F \cdot G
 \end{aligned}$$

insgesamt

$$(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = G$$

Normal Komponente von \underline{D} macht einen Sprung, falls $G \neq 0$

beachte aber:

~~Die~~ Auch für $G=0$ kann die die Normal Komponente von \underline{E} immer noch unstetig sein!

$$\begin{aligned}
 \underline{D} &= \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\
 &= \epsilon_0 \underline{E} + \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \\
 &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}
 \end{aligned}$$

also: Annahme $D_n^{(1)} = D_n^{(2)}$, da $\vec{b} = 0$
 $(\underline{D}_n = \underline{D} \cdot \underline{n})$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_n^{(2)}$$

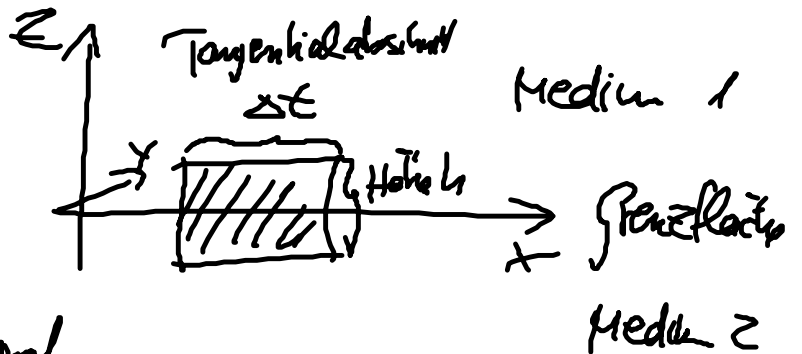
$$\Rightarrow E_n^{(1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_n^{(2)}$$

Was folgt aus Maxwell-Gl. (3), (4)

aus (3): $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

$$\int_{\mathcal{F}} d\underline{r} \cdot \underline{E} = \int_{\mathcal{F}} \nabla \times \underline{E} \cdot \underline{r} = \int_{\mathcal{F}} \underline{r} \cdot \dot{\underline{B}}$$

Stokes \mathcal{F} Kurvenintegral



$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}} \underline{dr} \cdot \underline{E} = (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \Delta \underline{l}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{!}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(- \underbrace{\int_{\underline{B}} \text{d}F \cdot \dot{\underline{B}}}_{\underline{\dot{B}} \cdot \underline{n} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} F = 0} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Tangentialkomponente von \underline{E} bleibt stetig!