

~~ist~~ 0 für $h \rightarrow 0$

$$\left(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

Tangentialkomponente
von \underline{E} stetig

$$\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \underline{\dot{D}}$$

$$\int_{CF} d\underline{F} \cdot \text{rot } \underline{H} = \int_{CF} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \int_{CF} d\underline{F} \cdot \underline{j} + \int_{CF} d\underline{F} \cdot \underline{\dot{D}}$$

im Limes $h \rightarrow 0$:

$$\int_{CF} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t}$$

Wegelimit in Tangential-
richtung

$$\int_{CF} d\underline{F} \cdot \underline{\dot{D}} = \underline{\dot{D}} \cdot \underbrace{\underline{n} \cdot \underline{F}}_{\substack{\neq 0 \\ \text{für } h \rightarrow 0}} \rightarrow 0$$

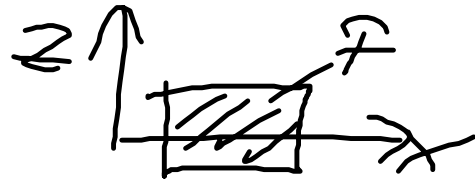
Zum Stromintegral: Nehme an, die Platte trägt
eine "Flächenstromdichte"

(Analog zur
Flächenladungsdichte)

$$\underline{j}(\underline{r}) = g(x, y) d\underline{r}$$

(Maximal bei $z=0$)

$$\int d\vec{F} \cdot \underline{j}(\underline{r})$$



$$= \int d\vec{F} \cdot \underline{j} \cdot \underline{n}$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_{a}^{b} dx \underline{j} \cdot \underline{n} = \int dx g(x,y) \underline{n}$$

$$= g \cdot \underline{n} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t} = g \cdot \underline{n} \cdot \Delta t$$

Tangential Komponente von \underline{H} macht eine Sprung, falls
Flächenstromdichte vorhanden!

~~Beispiel~~ Folgerung aus der Stetigkeitsbedingung
für $\underline{D} \cdot \underline{n}$

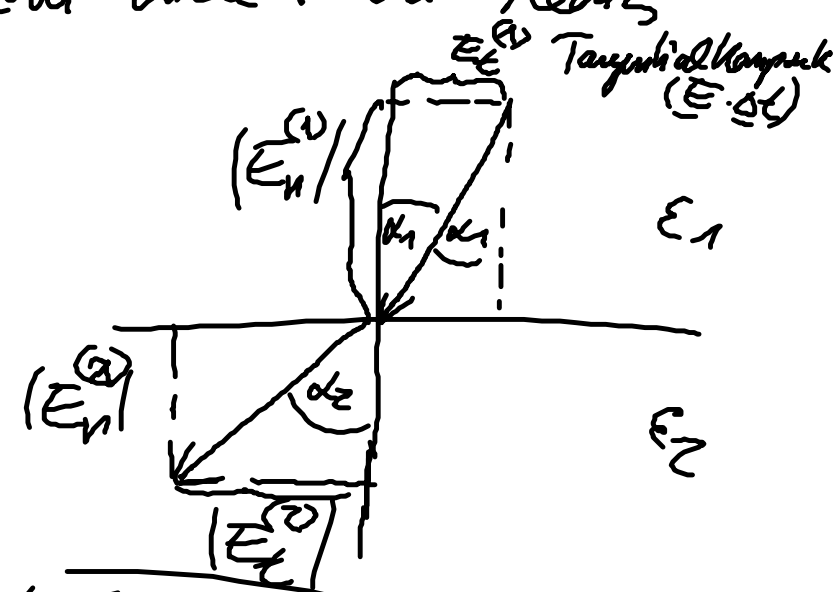
Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien
 bei $\vec{b} = 0$

$$\underline{D}^{(1)} \cdot \underline{n} = \underline{D}^{(2)} \cdot \underline{n}$$

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

$$\epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_2 E_n^{(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_n^{(2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_n^{(1)}}$$



$$\sin \alpha_1 = \frac{E_t^{(1)}}{E^{(1)}}$$

mit $E^{(1)} = |E^{(1)}|$

$$\cos \alpha_1 = \frac{E_n^{(1)}}{E^{(1)}} = \frac{E_n^{(1)}}{|E_n^{(1)} + E_t^{(1)}|}$$

analog für α_2

$$\Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{E_t^{(1)}}{E_n^{(2)}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{E_t^{(1)}}{E_n^{(1)}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{E_t^{(2)}}{E_n^{(2)}} \\ &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \alpha_2 \end{aligned}$$

Stetigkeit von E_t

$$\Rightarrow \boxed{\tan \alpha_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \alpha_2}$$

Brechungsgesetz für die Feldlinien von \underline{E}
 beim Übergang von Medium ① nach
 Medium ② !

wichtig für
 Jahresthe Probe

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} < 1 \Rightarrow \tan \alpha_1 < \tan \alpha_2$$

da $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ $\alpha_1 < \alpha_2$ ∴ Brechung vom
 Lot weg!

VI.6 Freie Wellen in Materie

Betrachte Lösung der ^{zeitabhängige} Maxwell-Gleichung
in Materie, aber ohne freie Ladung und Strom

$$\left(\begin{array}{l} j=0 \\ \rho=0 \end{array} \right)$$

$$\textcircled{1} \quad \nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \nabla \cdot \underline{D} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = 0$$

außerdem

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

$$\underline{B} = \mu \mu_0 \underline{H}$$

(homogenes, isotropes,
lineares Medium)

wende Rotation auf $\textcircled{1}$ an

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E}$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E}$$

$$= -\Delta \underline{E}$$

$$= -\nabla \times \dot{\underline{B}}$$

$$= -\frac{1}{c^2} \epsilon \mu \dot{\dot{\underline{E}}}$$

aus $\textcircled{4}$

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \dot{\dot{\underline{E}}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{E}} = 0}$$

analog aus (4): $\boxed{\Delta \underline{B} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{B}} = 0}$

alles analog zum Vakuum-Fall

\Rightarrow Lösungen sind ebene Wellen!

generelle Lösung: $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

mit $\boxed{\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} k}$ mit $k = |\underline{k}|$

(im Vakuum: $\epsilon = \mu = 1$)

Definition des Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon \mu} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{c}{n} k}$

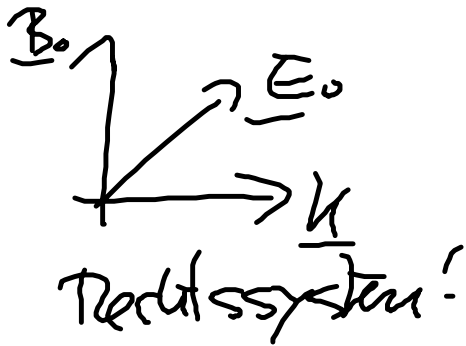
Auch die für den Vakuum-Fall
hergeleitete Beziehung für
"Transversalität" ~~gilt~~ gelten (mit $c \rightarrow \frac{c}{n}$)

$$\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$$

$$\underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0$$

$$\frac{k}{k} \times \underline{E}_0 = \frac{c}{n} \underline{B}_0$$

$$= \frac{\omega}{k} \underline{B}_0$$



$$\frac{k}{k} \times \underline{B}_0 = -\frac{n}{c} \underline{E}_0$$

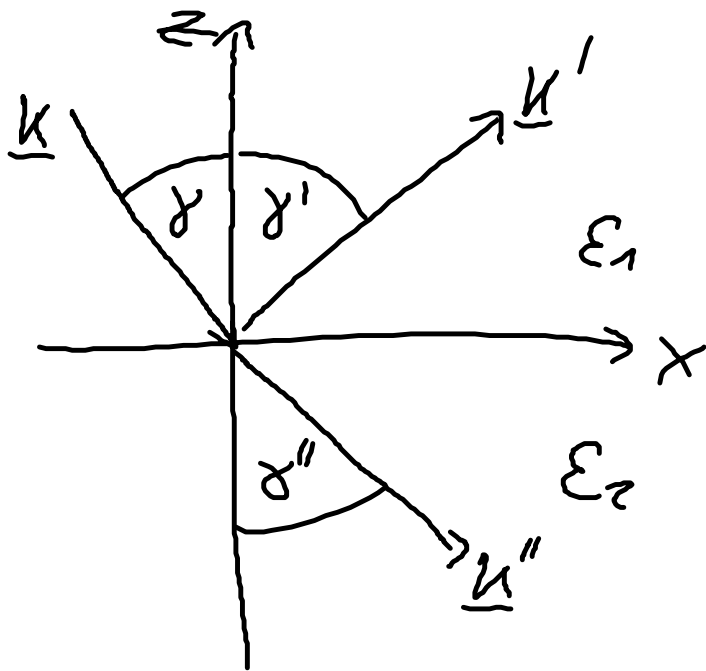
VI.7. Bedingung und Reflexion
einer ultramagnetischen Welle
an Materiegrenzflächen

Annahme:

- Grenzfläche entspricht der $x-y$ -Ebene
liegt bei $z=0$
- Keine Flächenladung (strom-)dichte

• Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2$

• $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$



Einfallende Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

reflektierte Welle

$$\underline{E}' = \underline{E}'_0 e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)}$$

transmittede Welle

$$\underline{E}'' = \underline{E}''_0 e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)}$$

außerdem: $\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_1 \underline{E}$, $\underline{D}' = \epsilon_0 \epsilon_1 \underline{E}'$, $\underline{D}'' = \epsilon_0 \epsilon_2 \underline{E}''$

Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{c}{n_1} k$$

$$\omega' = \frac{c}{n_1} k'$$

$$\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$$

$$n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu}$$

$$n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu}$$

Setze $\mu=1$

Die B-Felder stehen jeweils ⊥ auf E und k

Grenzbedingungen für die Felder

$$\textcircled{1} \left(\underbrace{\underline{E} + \underline{E}'}_{\text{Gesamtfeld in Medium 1}} - \underbrace{\underline{E}''}_{\text{Feld in Medium 2}} \right) \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

$$\underline{\Delta t} = (x, y, 0)$$

$$\textcircled{2} \left(\underline{D} + \underline{D}' - \underline{D}'' \right) \cdot \underline{n} = 0, \quad \underline{n} = \hat{\underline{e}}_z$$

$$\textcircled{3} \left(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'' \right) \cdot \underline{n} = 0$$

$$\textcircled{4} \left(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'' \right) \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

Drei Bedingungen müssen an allen Orten auf der Grenzfläche $\underline{r} = (x, y, 0)$ und zu allen Zeiten t erfüllt sein!

$$e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)} \Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)} \Big|_{z=0}$$

⊗

betrachte $\underline{r} = (0, 0, 0)$

$$\omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''} \quad \begin{array}{l} \text{Frequenzen} \\ \text{bleiben} \\ \text{unverändert!} \end{array}$$

mit Dispersionsrelation: $|\underline{k}'| = |\underline{k}|$

$$|\underline{k}''| = \frac{n_2}{n_1} |\underline{k}|$$

betrachte nun speziell die Zeit $t=0$

$$\text{aus } \textcircled{\otimes} \quad (\underline{k} \cdot \underline{r}) \Big|_{z=0} = (\underline{k}' \cdot \underline{r}) \Big|_{z=0} = (\underline{k}'' \cdot \underline{r}) \Big|_{z=0}$$

also: Projektion von \underline{k} auf \underline{r} müssen gleich sein für jedes beliebige \underline{r} in der Grenzfläche

Drei drei Wellenvektoren

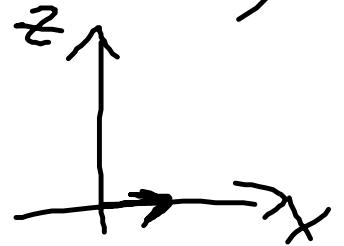
\underline{k} , \underline{k}' und \underline{k}'' liegen alle

in einer Ebene,

der sogenannte Einfallsebene

(hier: $x-z$ -Ebene)

Betrachte z.B. $\underline{k} = (k_x, 0, 0)$



$$k_x \cdot x = k_x' \cdot x = k_x'' \cdot x$$

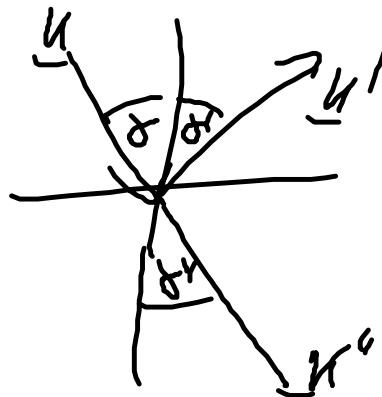
x -Komponente von \underline{k}

es gilt:

$$k_x = k \sin \gamma$$

$$k_x' = k' \sin \gamma'$$

$$k_x'' = k'' \sin \gamma''$$



Wir wissen: $k = k'$

da $k_x = k_x'$ folgt:

$$\sin \gamma = \sin \gamma'$$

Reflexionsgesetz
"Einfallswinkel
= Ausfallswinkel"

aufzuheben:

$$\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} = \frac{|k'|}{|k''|} = \frac{k'}{k''} = \frac{k}{k''} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} = \frac{n_1}{n_2}$$

Snellius'sches
Brechungsgesetz!

$n_1 < n_2$: Übergang in optisch dichteres Medium
 $\sin \gamma'' < \sin \gamma$

Ziel nun:

Berechnung der Feldamplitude

→ Information über Intensität
der reflektierten / transmittierten Wellen
relativ zur einfallenden Welle

Man typischerweise 2 Spezialfälle

a) Lineare Polarisation \perp zur Einfallsebene
(x-z-Ebene)

$$\underline{E}_0 = E_0 \hat{e}_y$$

b) Lineare Polarisation \parallel zur Einfallsebene

Diskutiere hier Fall a)