

Total reflexion

$n_1 > n_2$ — Einfall der Welle
in ein optisch
dünneres Medium

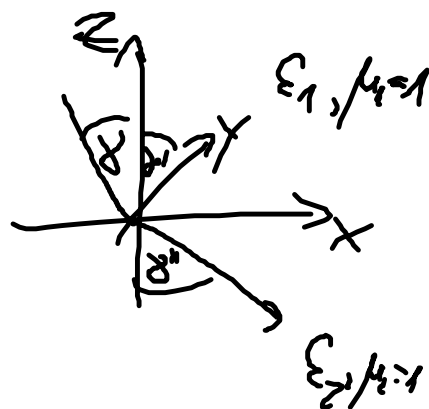
Total reflexion $\delta'' = \frac{\pi}{2}$

$$\sin \delta_G = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2/\mu_2}{\epsilon_1/\mu_1}}$$

aufgabe: $\sin \delta'' = \frac{\sin \delta}{\sin \delta_G}$

$$\Rightarrow \cos \delta'' = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \delta}{\sin \delta_G}\right)^2}$$

man sieht: $\delta > \delta_G$, dann wird $\cos \delta''$ rein
imaginär!



Folgerung für $\underline{E}, \underline{S}$ in Medium 2

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0' e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

transmitted
wave

$$\underline{k}'' = \begin{pmatrix} k_x'' \\ 0 \\ k_z'' \end{pmatrix}$$

benutze: $k_z'' = k'' \cos \delta''$
 $= \frac{\sin \delta}{\sin \delta''} k \cos \delta''$

Snellius $k_x'' = k'' \sin \delta''$

$$\begin{aligned}
 \underline{E}'' &= \underline{E}_0'' e^{ik''x} e^{ik''z} e^{-i\omega t} \\
 &= \underline{E}_0'' e^{ik'' \sin \delta'' x} e^{ik'' \cos \delta'' z} e^{-i\omega t} \\
 &= \underline{E}_0'' e^{ik'' \frac{\sin \delta}{\sin \delta_0} x} e^{ik'' \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \delta}{\sin \delta_0}\right)^2} z} e^{-i\omega t}
 \end{aligned}$$

Betrachte nun: $\delta > \delta_0$

$$\begin{aligned}
 \underline{E}'' &= \underline{E}_0'' e^{ik''x \frac{\sin \delta}{\sin \delta_0}} \\
 &\quad \cdot e^{-k''z \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \delta_0}\right)^2 - 1}} e^{-i\omega t} \\
 &= \underline{E}_0'' e^{-k''z \sqrt{\left(\frac{\sin \delta}{\sin \delta_0}\right)^2 - 1}} e^{ik''x \frac{\sin \delta}{\sin \delta_0} - i\omega t}
 \end{aligned}$$

exponentielles Abklingen entlang der z-Richtung!

Weitere Bemerkung:

Es gibt tatsächlich ein Feld im optisch dünneren Medium

Feld verschwindet mit dem Abstand z von der Grenzfläche

Die Welle wird nur in x -Richtung
(entlang der Grenzfläche) propagiert!

Energiefluß

$$\begin{aligned} \text{Betrachte } \text{Re}(\underline{\Sigma}''') &= \frac{1}{\omega \mu_0} \text{Re} \underline{k} (\text{Re}(\underline{E}''')) \\ &= \dots = \frac{1}{\omega \mu_0} k_x'' \underline{e}_x |\underline{E}_0''|^2 \cos^2(k_x'' - \omega t) e^{-k'' z} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0^2}{\epsilon_0 \mu_0} - 1} \end{aligned}$$

VI.8. Wellenausbreitung in leitenden Materialien

Betrachte Material, in dem es keine
freien Ladungen gibt ($\rho(\underline{r}, t) = 0$)

aber $\underline{j}(\underline{r}, t) \neq 0$ Ohm'sches Gesetz

mit $\underline{j}(\underline{r}, t) = \sigma \underline{E}(\underline{r}, t)$

↳ Leitfähigkeit

Lineare
Zeremonie

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \epsilon_0 \epsilon \underline{E} \\ \underline{H} &= \left(\frac{1}{\mu_0 \mu}\right) \underline{B} \end{aligned}$$

Maxwell-Gl:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \nabla \cdot \underline{E} &= 0 \\ \textcircled{2} \quad \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned}$$

$$(3) \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$(4) \nabla \times \underline{B} = \underbrace{\mu_0 \mu}_\text{neuer Term} \underbrace{\sigma \underline{E}}_+ + \underbrace{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{c^2}}_{\frac{n^2}{\epsilon \mu}} \dot{\underline{E}} \text{ (Verschiebungsstrom)}$$

~~Die~~ Zur Annahme $\rho(\underline{r}, t) = 0$

betrachte (4)

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{B}) = 0 = \mu_0 \mu \sigma \nabla \cdot \underline{E} + \frac{n^2}{c^2} \nabla \cdot \dot{\underline{E}} \quad (*)$$

nehme an: $\rho(\underline{r}, t > 0) \neq 0$

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, t > 0) = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \rho(\underline{r}, t > 0)$$

einsetzen in (*)

$$\frac{\mu \mu_0}{\epsilon \epsilon_0} \sigma \rho(\underline{r}, t) + \mu \mu_0 \dot{\rho}(\underline{r}, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\tau} \rho(\underline{r}, t)$$

$t > 0$

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} = \frac{\epsilon}{\sigma} \tau$$

$$\rho(r, t) = \rho(r, t=0) e^{-t/\tau}$$

(interpretation:

- a) Ein auf einer geladenen Leiter verbleibt die Ladung exponentiell!
- b) Wenn der Leiter auf einer aufgeladen war, so bleibt er es für alle Zeit.

Jetzt: Wir können einfach $\rho \rightarrow 0$ für t annehmen

Zurück zu den Maxwell-Gl. mit $j \neq 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_0) - \Delta \underline{E}$$

$$\stackrel{\textcircled{3}}{=} -\nabla \times \underline{B}$$

$$\stackrel{\textcircled{4}}{=} -\mu_0 \mu_0 \dot{\underline{E}} - \frac{\kappa^2}{c^2} \ddot{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{E} - \frac{\kappa^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} - \mu_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E} = 0$$

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

"Telegraphengleichung"

mathematisch: "gedämpfte Wellengleichung"

Analog:

$$\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

Lösung der gedämpften Wellengleichung

Ansatz: harmonische ebene Welle

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Einsetzen in Gl. für \underline{E}

$$-k^2 \underline{E} - \frac{n^2}{c^2} (-\omega^2) \underline{E} - \mu_0 \mu \sigma (-i\omega) \underline{E} = 0$$

$$-k^2 + \frac{k^2 \omega^2}{c^2} + \mu_0 \mu i \omega \sigma = 0$$

$$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\epsilon \omega} \right)$$

definieren

$$\tilde{\tau} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \quad \text{„Relaxationszeit“}$$

$$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tilde{\tau}} \right) \quad \text{⊗}$$

man sieht:

- die Wellenzahl k wird also komplex
- Für $\sigma \rightarrow 0$ ($\tilde{\tau} \rightarrow \infty$) erhält man das alte Resultat ($k = \frac{n}{c} \omega$, $n = \sqrt{\epsilon \mu}$)

$$\text{Setze } k = \frac{\omega}{c} (\tilde{n} + i \gamma)$$

\tilde{n} : komplexe Brechzahl!
 Brechzahl!

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\tilde{n}^2 - \gamma^2 + 2i \tilde{n} \gamma)$$

$$\textcircled{A} \rightarrow \stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)$$

$$\rightarrow \bar{n}^2 - \gamma^2 \stackrel{!}{=} \epsilon \mu \quad \textcircled{A}$$

$$\bar{n} \gamma = \frac{\epsilon \mu}{2 \omega \tau} = \frac{\mu \sigma}{2 \epsilon_0 \omega} \quad \textcircled{B}$$

Bestimmungsgleichung
 für \bar{n} ~~ist~~
 und γ als
 Funktionen von
 ϵ, μ, σ
 Materialparameter

Löse \textcircled{B} nach γ auf und setze in \textcircled{A} ein

$$\bar{n}^2 = \epsilon \mu + \gamma^2$$

$$= \epsilon \mu + \left(\frac{\mu \sigma}{2 \epsilon_0 \omega \bar{n}} \right)^2 \quad | \cdot \bar{n}^2$$

$$\bar{n}^4 - \epsilon \mu \bar{n}^2 = \left(\frac{\mu \sigma}{2 \epsilon_0 \omega} \right)^2$$

$$\bar{n}^2 = \frac{\epsilon \mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon \mu}{4} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon \mu^2 \sigma}{4 \epsilon_0 \omega} \right)^2}$$

Da \bar{n} per Definition reell ist, muss die positive Wurzel ("+") genommen werden

$$\bar{n}^2 = \frac{\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} \right)$$

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon\mu}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} \right)$$

Check:

Für $\sigma \rightarrow 0$: $\bar{n}^2 \rightarrow \frac{\epsilon\mu}{2} (1+1) = \epsilon\mu$

$$\gamma^2 \rightarrow \frac{\epsilon\mu}{2} (-1+1) = 0$$

Brechungsindex wird wieder reell!

✓

Implikationen *

Für die ebene Welle in Medien

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

definiere $\hat{u} = \frac{u}{|u|} \Rightarrow u \cdot n \Rightarrow \hat{u} \cdot n$ $\frac{\omega^2}{c^2 n^2}$

$$\Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\frac{\omega}{c} \hat{u} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$= \underline{E}_0 e^{-\gamma \frac{\omega}{c} \hat{u} \cdot \underline{r}} e^{i(\frac{\omega}{c} \hat{u} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

$$= \underline{E}_0 e^{-\gamma \frac{\omega}{c} z} e^{i(\frac{\omega}{c} z - \omega t)}$$

z.B. $\hat{u} = \underline{e}_z$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{-\gamma \frac{\omega}{c} z} e^{i(\frac{\omega}{c} z - \omega t)}$$

gedämpfte ebene Welle

physikalisch: Dämpfung resultiert aus der Bildung von "Wärme" im Leiter
(Reibung, Dissipation)

" γ " (Imaginärteil von n) wird manchmal als Extinktionskoeffizient bezeichnet

Weitere Zusammenfassung

• Dämpfung:

Die Welle dringt nicht beliebig tief in das Material mit $\vec{b} = 0$ ein!

Man definiert:

„ Eindringtiefe “

$$\delta = \frac{c}{\omega \gamma}$$

(Dimension Länge!)

Entfernung Δz , nach der die ~~Welle~~ Amplitude auf den „ersten“ Teil abgefallen ist

• Folgerung für \underline{B}

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Man findet: \hat{k} , \underline{E}_0 , \underline{B}_0 bilden wieder ein

Rechtsystem
(Wellen sind
transversal)

$$\underline{B}_0 = \frac{\hat{n}}{c} (\hat{k} \times \underline{E})$$

$$\underline{k} = \hat{n} k$$

$$\hat{n} = \bar{n} + i\gamma$$
$$= \sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2} e^{i\varphi}$$

$$\text{mit } \tan \varphi = \frac{\gamma}{\bar{n}}$$

Damit folgt:

$$\underline{B} = \frac{\sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2}}{c} (\hat{n} \times \underline{E}) e^{i\varphi}$$

Phasenverschiebung um φ !

(Für $\gamma \rightarrow 0$ (d.h. $\bar{\sigma} \rightarrow 0$)
gilt $\varphi \rightarrow 0$!)

- Die Phasengeschwindigkeit der Welle in z -Richtung
betrachtet Bewegung einer Ebene mit konstanter Phase

(Vorgehen analog zur Diskussion ebener Welle im Vakuum!)

$$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = \text{const}$$

Realteil

(Imaginärteil von \underline{k} geht nicht in den Phasenfaktor der Welle ein!)

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \bar{n} \hat{n} \cdot \underline{r} - \omega t = \text{const} \quad \text{setz setze } \hat{k} = \frac{\underline{k}}{k}$$

$$\text{bzw. } \frac{\omega}{c} \bar{n} z - \omega t = \text{const}$$

$$v_{\text{phase}} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\bar{n}} (\omega t + \text{const}) \right) = \frac{c}{\bar{n}}$$

Rechtlich

$$\bar{n}^2 = \frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}} \right)$$

$$> 2 \text{ für } \sigma > 0$$

Die Phasengeschwindigkeit ist also kleiner als in einem Medium mit $\sigma = 0$

• Verhalten in sehr guten Leitern

(σ groß)

Ergebnis aus der Wellengleichung:

$$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \right)$$

Vernachlässige Realteil

$$k^2 \approx \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i}{\omega \tau} \quad ; \quad \tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$$

(gleichbedeutend $\frac{1}{\omega \tau} \gg 1$
oder $\tau \ll \frac{1}{\omega}$)

diese Rechnung $\Rightarrow \gamma^2 \approx \frac{\epsilon \mu}{2 \omega \tau} \Rightarrow \delta = \frac{c}{\omega \gamma}$
Eindringtiefe

Resultierende Eindringtiefe

$$\delta \approx \text{wenige cm für } \omega = 100 \text{ Hz}$$

In einem sehr guten Leiter geht die Eindringtiefe gegen Null!

VI.9, Dispersion (dielektrisches Material)

Betrachte Materie mit $\mu \approx 1$
und $\epsilon = \epsilon(\omega)$

\Rightarrow auch Brechungsindex $n = n(\omega)$!!

Zugehörige Maxwellgleichung?

Startpunkt:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(\underline{r}, t-t') \underline{E}(\underline{r}, t')$$

Polarisation