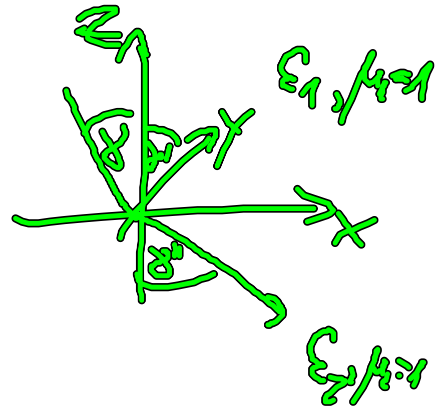
Totalreflexion

$n_1 > n_2$ — Eintritt der Welle in ein optisch dünnes Medium



Totalreflexion $\gamma'' = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\gamma_G = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

auflösen: $\sin\gamma'' = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}$

$$\Rightarrow \cos\gamma'' = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2}$$

man sieht: $\gamma > \gamma_G$, dann wird $\cos\gamma''$ rein imaginär!

Folgerung für $\underline{E}$, $\underline{S}$ in Medium 2

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

transmittierte Welle

$$\underline{k}'' = \begin{pmatrix} k_x'' \\ 0 \\ k_z'' \end{pmatrix}$$

benutze: $k_z'' = k'' \cos\gamma''$

Snellius $\rightarrow$ $= \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma''} k \cos\gamma''$

$k_x'' = k'' \sin\gamma''$

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{ik_x''x} e^{ik_z''z} e^{-i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0'' e^{ik''\sin\gamma'' x} e^{ik''\cos\gamma'' z} e^{-i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0'' e^{ik''\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}x} e^{ik''\sqrt{1-\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2}z} e^{-i\omega t}$$

Betrachte nun: $\gamma > \gamma_G$

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{ik''x\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}} \cdot e^{-k''z\sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2-1}} e^{-i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0'' e^{-k''z\sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2-1}} e^{ik''x\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}-i\omega t}$$

exponentielles Abklingen entlang der z-Richtung

Weitere Bemerkungen:

Es gibt tatsächlich ein Feld im optisch dünneren Medium

Feld verschwindet mit dem Abstand z von der Grenzfläche

Die Welle wird nur in x-Richtung (entlang der Grenzfläche) propagiert!

Energiefluß

Betrachte $\mathrm{Re}(\underline{S}'') = \frac{1}{\omega\mu_0} \mathrm{Re}\, \underline{k} \left(\mathrm{Re}(\underline{E}'')\right)^2$

$$= \ldots = \frac{1}{\omega\mu_0} k_x'' \vec{e}_x |\underline{E}_0''|^2 \cos^2(k_x'' - \omega t)\, e^{-k'' z \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2 - 1}}$$

VI.8. Wellenausbreitung in leitenden Materialien

Betrachte Material, in dem es "keine" freien Ladungen gibt $(\rho(\underline{r},t) = 0)$

aber $j(\underline{r},t) \neq 0$ Ohm'sches Gesetz

mit $j(\underline{r},t) = \sigma\, \underline{E}(\underline{r},t)$

σ: Leitfähigkeit

Linearer Zusammenhang

$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}$

$\underline{H} = \left(\frac{1}{\mu_0\mu}\right)^{-1} \underline{B}$

Maxwell-Gl.:

① $\nabla \cdot \underline{E} = 0$

② $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

③ $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

④ $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \mu \underbrace{\underbrace{\sigma \underline{E}}_{\vec{j}}}_{\text{neuer Term}} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{c^{-2}} \overbrace{\varepsilon \mu}^{n^2} \dot{\underline{E}}(\underline{r}, t)$

Verschiebungsstrom

~~Die~~ Zur Annahme $\rho(\underline{r}, t) = 0$

betrachte ④

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{B}) = 0 = \mu_0 \mu \sigma \nabla \cdot \underline{E} + \frac{n^2}{c^2} \nabla \cdot \dot{\underline{E}} \quad (*)$$

nehme an: $\rho(\underline{r}, t > 0) \neq 0$

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, t > 0) = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0} \rho(\underline{r}, t > 0)$$

einsetzen in (*)

$$\frac{\mu \mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0} \sigma \rho(\underline{r}, t) + \mu \mu_0 \dot{\rho}(\underline{r}, t) = 0 \quad , t > 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\rho}(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\tau} \rho(\underline{r}, t)$$

$$\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$$

$$\rho(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t=0)\, e^{-t/\tau}$$

Interpretation:

a) Ein anfangs geladener Leiter verliert die Ladung exponentiell!

b) Wenn der Leiter anfangs ungeladen war, so bleibt er es für alle Zeit.

Jetzt: wir können einfach

$\rho = 0 \quad \forall t$ annehmen

Zurück zu den Maxwell-Gl. mit $j \neq 0$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{E}}_{0}) - \Delta \underline{E}$$

$$\overset{(3)}{=} -\nabla \times \underline{\dot{B}}$$

$$\overset{(4)}{=} -\mu_0\mu\sigma\underline{\dot{E}} - \frac{n^2}{c^2}\underline{\ddot{E}}$$

$$\Rightarrow \Delta \underline{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} - \mu_0\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}\underline{E} = 0$$

$$\boxed{\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{E}(r,t) = 0}$$

„Telegraphengleichung"

mathematisch: „gedämpfte Wellengleichung"

Analog:

$$\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0\mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

Lösung der gedämpften Wellengleichung

Ansatz: harmonische ebene Welle

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Einsetzen in Gl. für $\underline{E}$

$$-k^2\underline{E} - \frac{n^2}{c^2}(-\omega^2)\underline{E} - \mu_0\mu\sigma(-i\omega)\underline{E} = 0$$

$$-k^2 + \frac{n^2\omega^2}{c^2} + \mu_0 \mu \, i\omega\sigma = 0$$

$$k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\varepsilon\,\omega}\right)$$

definiere

$$\hat{\tau} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma} \quad \text{„Relaxationszeit"}$$

$$\boxed{k^2 = \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{1}{\omega\hat{\tau}}\right)} \quad (*)$$

man sieht:

- die Wellenzahl k wird also komplex
- Für $\sigma \to 0$ ($\hat{\tau} \to \infty$) erhält man das alte Resultat ($k = \frac{n}{c}\omega$, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$)

Setze $k = \frac{\omega}{c}\underbrace{(\bar{n} + i\gamma)}_{\hat{n}}$

$\hat{n}$: komplexer Brechungsindex!

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma\right)$$

$$\overset{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon\mu\left(1 + i\,\frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$\rightarrow \quad \bar{n}^2 - \gamma^2 \overset{!}{=} \varepsilon\mu \qquad (A)$$

$$\bar{n}\gamma = \frac{\varepsilon\mu}{2\omega^2} = \frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega} \qquad (B)$$

Bestimmungsgleichungen für $\bar{n}$ und γ als Funktion von $\underbrace{\varepsilon, \mu, \sigma}_{\text{Materialparameter}}$

löse (B) nach γ auf und setze in (A) ein

$$\bar{n}^2 = \varepsilon\mu + \gamma^2$$

$$= \varepsilon\mu + \left(\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega\bar{n}}\right)^2 \quad \Big|\cdot\bar{n}^2$$

$$\bar{n}^4 - \varepsilon\mu\bar{n}^2 = \left(\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right)^2$$

$$\bar{n}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon\mu)^2}{4} + \frac{(\varepsilon\mu)^2}{4}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\omega}\right)^2}$$

Da $\bar{n}$ per Definition reell ist, muss die positive Wurzel ("+") genommen werden

$$\bar{n}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2}\right)$$

$$\gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2}\right)$$

Check:

Für $\sigma \to 0$: $\bar{n}^2 \to \frac{\varepsilon\mu}{2}(1+1) = \varepsilon\mu$

$\gamma^2 \to \frac{\varepsilon\mu}{2}(-1+1) = 0$

Brechungsindex wird wieder reell! ✓

Implikationen für die ebene Welle im Medium

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

definiere $\hat{\underline{k}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \Rightarrow \underline{k}\cdot\underline{r} \Rightarrow \hat{\underline{k}}\, k\, \underline{r}$ (mit $k = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$)

$$\Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \omega t\right)}$$

$$= \underline{E}_0\, e^{i\frac{\omega}{c}(\bar{n}+i\gamma)\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \omega t}$$

$$= \underline{E}_0\, e^{-\gamma\frac{\omega}{c}\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r}}\; e^{i\left(\frac{\omega}{c}\bar{n}\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \omega t\right)}$$

z.B. $\hat{\underline{k}} = \hat{\underline{e}}_z$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{-\gamma\frac{\omega}{c}z}\; e^{i\left(\frac{\omega}{c}\bar{n}z - \omega t\right)}$$

gedämpfte ebene Welle

physikalisch: Dämpfung resultiert aus der Bildung von "Wärme" im Leiter (Reibung, Dissipation)

"γ" (Imaginärteil von n) wird manchmal als Extinktionskoeffizient bezeichnet

Weitere Bemerkung

- Dämpfung:

Die Welle dringt nicht beliebig tief in den Material mit $\sigma \neq 0$ ein!

Man definiert:

„Eindringtiefe“ $\delta = \frac{c}{\omega \gamma}$ (Dimension Länge!)

Entfernung Δz, nach der die ~~Welle~~ Amplitude auf den „e-ten“ Teil abgefallen ist

- Folgerung für $\underline{B}$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 \, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Man findet: $\hat{\underline{k}}$, $\underline{E}_0$, $\underline{B}_0$ bilden wieder ein

Rechtssystem
Wellen sind
(transversal)

~~aber~~ $\underline{B}_0 = \frac{\hat{n}}{c}(\hat{\underline{k}} \times \underline{E})$

$\underline{k} = \hat{\underline{k}}\, k$

$\frac{\omega}{c}\hat{n}$

$\hat{n} = \bar{n} + i\gamma$

$= \sqrt{\bar{n}^2+\gamma^2}\, e^{i\varphi}$ mit $\tan\varphi = \frac{\gamma}{\bar{n}}$

Damit folgt:

$$\underline{B} = \frac{\sqrt{\bar{n}^2+\gamma^2}}{c}(\hat{\underline{k}} \times \underline{E})e^{i\varphi}$$

Phasenverschiebung um φ !

(Für $\gamma \to 0$ (d.h. $\sigma \to 0$)
gilt $\varphi \to 0$!)

- Die Phasengeschwindigkeit der Welle im Leiter
betrachte Bewegung einer Ebene mit konstanter Phase

(Vorgehen analog zu Diskussion ebene Welle im Vakuum!)

$$\underbrace{\underline{k}}_{\text{Realteil}} \cdot \underline{r} - \omega t \stackrel{!}{=} \text{const}$$

(Imaginärteil von $\underline{k}$ geht nicht in den Phasenfaktor der Welle ein!)

$$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \bar{n} \, \hat{\underline{k}} \cdot \underline{r} - \omega t = \text{const}$$ ~~setz~~ setze $\hat{\underline{k}} = \underline{e}_z$

bzw. $\frac{\omega}{c} \bar{n} z - \omega t = \text{const}$

$$v_{phase} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\omega \bar{n}}(\omega t + \text{const})\right) = \frac{c}{\bar{n}}$$

Beachte:

$$\bar{n}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2} \underbrace{\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2}\right)}_{> 2 \text{ für } \sigma > 0}$$

Die Phasengeschwindigkeit ist also kleiner als in einem Material mit $\sigma = 0$

- Verhalten in sehr guten Leitern

(σ groß)

Ergebnis aus der Wellengleichung:

$$k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)$$

vernachlässige Realteil

$$k^2 \approx \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i}{\omega\tau} \quad ; \quad \tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$$

(gleichbedeutend $\frac{1}{\omega\tau} \gg 1$ oder $\tau \ll \frac{1}{\omega}$)

ohne Rechnung $\Rightarrow \gamma^2 \approx \frac{\varepsilon\mu}{2\omega\tau} \Rightarrow \delta = \frac{c}{\omega\gamma}$

Eindringtiefe

Resultierende Eindringtiefe

$\delta \approx$ wenige cm für $\omega \approx 100$ Hz

In einem sehr guten Leiter geht die Eindringtiefe gegen Null!

VI.9. Dispersion (dielektrisches Material)

Betrachte Materialien mit $\mu \approx 1$

und $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$

$\Longrightarrow$ auch Brechungsindex $n = n(\omega)$!!

Zugehörige Materialbeziehung?

Startpunkt:

$$\underset{\text{Polarisation}}{\underline{P}}(\underline{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \chi_e(\underline{r}, t-t') \, \underline{E}(\underline{r}, t')$$