

VI.9. Dispersion (dielektrisch)

$$\mu \approx 1 \\ \Rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}$$

allgemein sind ϵ und damit auch n frequenzabhängig!
 $\epsilon(\omega), n(\omega)$

Zugehörige Materialbeziehungen (homogenes, isotropes Medium)

Polarisation:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(\underline{r}, t-t') \underline{E}(\underline{r}, t')$$

betrachte
also nur zeitl. Dispersion, die Antwort des Systems
ist lokal im Ort!

betrachte Kausalität.

Die Antwortfunktion $\chi_e(\underline{r}, t-t')$
muss kausal sein, d.h.

$$\chi_e = 0 \quad \text{für } t' > t$$

Fouriertransformierte des Maxwellbeziehung.

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

analog hier $\underline{E}, \underline{\chi}_e$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int dt' \int d\omega' \int d\omega \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega') \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega'(t-t')} e^{-i\omega t}$$

benutzt

$$\frac{1}{2\pi} \int dt' e^{-i(\omega-\omega')t'} = \delta(\omega'-\omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ = \frac{\epsilon}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

soll $\forall \omega$ gelten

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega)}$$

häufig vernlässigt man die
Ortsabhängigkeit (homogener Medien)

$$\underline{\hat{P}}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{\hat{E}}(\omega)$$

benutze:

$$\epsilon(\omega) := 1 + \chi_e(\omega)$$

frequenzabhängig
und komplex!

$$= \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega)$$

es gilt:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(t') e^{i\omega t'}$$

Kausalität:

(vanu $\hat{\chi}_e$)
 $\chi_e(t-t') = 0$

für $t' > t$

dh. $\tilde{\chi} < 0$)

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt' \chi(t') e^{i\omega t'}$$

außerdem:

Die Funktion $\chi_e(t)$ ist reell
(da $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$ reelle Materialbeziehung)

Dann

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}^*(\omega) &= 1 + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int dt' \underbrace{\chi_e^*(t')}_{= \chi_e(t')} e^{-i\omega t'} \\ &= \underline{\epsilon}(-\omega) \end{aligned}$$

Folgerungen für Wellenausbreitung in dem Medium

genereller Ansatz:

$$k = \frac{n}{c} \omega \iff k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 = \frac{\epsilon}{c^2} \omega^2 \quad \mu=1$$

jetzt: n^2 bzw c sind
frequenzabhängig
und (i.a.) komplex!

$$\text{also } n \rightarrow \tilde{n} = \bar{n}(\omega) + i\gamma(\omega)$$

$$n^2 \rightarrow \tilde{n}^2 = \bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma$$

wir hatten:

$$\epsilon \rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= (\bar{n}(\omega))^2 - (\gamma(\omega))^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2\bar{n}(\omega)\gamma(\omega) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Spezialfall:

da $\bar{n} \neq 0$

$$\bullet \epsilon'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0, \text{ also } n = \bar{n} = \sqrt{\epsilon'}$$

ungedämpfte Welle!

$$\bullet \epsilon'' > 0, \gamma > 0 \quad \text{gedämpfte Welle}$$

(siehe Diskusst. in Kap. VI.8)

Erinnerung:

$$\underline{k} = k \hat{k}$$

$$k = \frac{\tilde{n}(\omega)}{c} \omega$$

„dissipativer“ Fall

(„Absorption“)

Der Frequenzverlauf $\epsilon'' < \epsilon'$ heißt

„Transparenzgebiet“ (da dort wenig Absorption)

Weitere Folgerungen aus der Frequenzabhängigkeit

$$k = \frac{\tilde{n}}{c} \omega$$

$$\underbrace{\operatorname{Re} k}_{k'} = \frac{\omega}{c} \underbrace{\tilde{n}(\omega)}_{\operatorname{Re} \tilde{n}}$$

hängt mit der Phasengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{phase}} = \frac{c}{\tilde{n}(\omega)}$$

Betrachte nun Gruppengeschwindigkeit der Well.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{d(\omega \tilde{n}(\omega)) / d\omega}$$

$$= \frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} \neq \frac{c}{n(\omega)} = v_{\text{phase}} !$$

Kramers - Kronig-Relationen

Allgemein-gültiger Zusammenhang

zwischen Real- und Imaginärteil der dielektr. Funktion bzw. den Brechungsindex

folgt aus der Kausalität der entsprechenden Antwortfunktion in der Zeitdomäne

Konkret:

$$\begin{aligned} \text{Re } \chi_e(\omega) &= \epsilon'(\omega) - 1 \\ &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\overbrace{\epsilon''(\omega')}^{\text{Im } \chi_e}}{\omega' - \omega} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{\epsilon''(\omega)}{\text{Im } \chi_e(\omega)}} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\overbrace{\epsilon'(\omega') - 1}^{\text{Re } \chi_e(\omega')}}{\omega' - \omega}$$

$\begin{aligned} \epsilon &= 1 + \chi_e \\ \text{Re } \epsilon &= 1 + \text{Re } \chi_e \\ \text{Im } \epsilon &= \text{Im } \chi_e \end{aligned}$
--

Dabei ist \mathcal{P} der sogenannte Hauptwert
des Integral.

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

VI.10. Mikroskopisches Modell der Dispersion

Ausgangspunkt:

mikroskop. Modell der statischen Polarisierbarkeit
eines Atoms (wie in Kap. VI.4)

$$\ddot{\underline{r}}(\underline{t}) + \omega_0^2 \underline{r}(\underline{t}) + \underbrace{\gamma}_{\text{Reibkoeffizient!}} \dot{\underline{r}}(\underline{t}) = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{lokal}}(\underline{t})$$

\underline{r} : Abstand des Schwerpunkts der positiven
und negativen Ladg in einem Atom

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3} \quad (\text{s. VI. 4})$$

neu: Dämpfungssystem:

beschreibt physikalisch ~~die~~ Wechselwirkung mit der Umgebung!

Das Modell heißt "Lorentz-Oszillator"
(gedämpfte harmonische Oszillatoren)

Erinnerung statischer Fall:

induziertes Dipolmoment in einem Atom

$$p = Ze \underline{r} \quad (*)$$

im stat. Fall: $\underline{r} \rightarrow \underline{r}^{eq}$ ← Gleichgewicht
(d.h. $\dot{\underline{r}}^{eq} = \ddot{\underline{r}}^{eq} = 0$)

$$\Rightarrow \underline{N}^{eq} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{lokal}$$

$$\Rightarrow \underline{p} = \alpha \underline{E}^{lokal} \quad \text{mit } \alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$$

Teilchendipol

Polarisierbarkeit

Polarisation : $\underline{P} = n \underline{p} = n \alpha \underline{E}^{lokal}$

dynamisch:

(*) $\underline{E}^{lokal}(t) = \underline{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\underline{P}(t) = n \underline{p}(t) = \underline{P}_0 e^{-i\omega t}$

vernachlässige Korrelationseffekte

und $\underline{p}(t) = Ze \underline{N}(t)$

Einsetzen in die Osillatorgleichung

$$\ddot{\underline{P}}(t) + \gamma \dot{\underline{P}}(t) + \omega_0^2 \underline{P}(t) = n \frac{Ze^2}{m_e} \underline{E}^{lokal}(t)$$

benutze (*)

$$\dot{\underline{P}} = -i\omega \underline{P}$$

$$\ddot{\underline{P}} = -\omega^2 \underline{P}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - \gamma i\omega + \omega_0^2) \underline{P}_0 = \omega_p^2 \epsilon_0 \underline{E}_0$$

$$\text{mit } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i\omega} \underline{E}_0$$

$$= \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

frequenzabhängige
Polarisierbarkeit

Betrachte die Def. der
eigenlichen dielektrischen Suszeptibilität

$$\underline{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}(\omega)$$

benutze die Lorentzbeziehung (Kap. VI.4)

$$\underline{E}^{\text{lokal}} = \underline{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

Kombiniere

$$\Rightarrow \underline{P}_0 \left(1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}\right) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

$$\rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}}$$

direkte Verallgemeinerung des früheren Zusammenhangs im stat. Fall!

Betrachte Systeme mit kleiner Dichte-

beacht: $\alpha(\omega) \sim \omega_p^2 \sim n$ ^{Dichte}

Im Falle α gilt also: $\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{3}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \alpha$

Wir setzen also näherungsweise

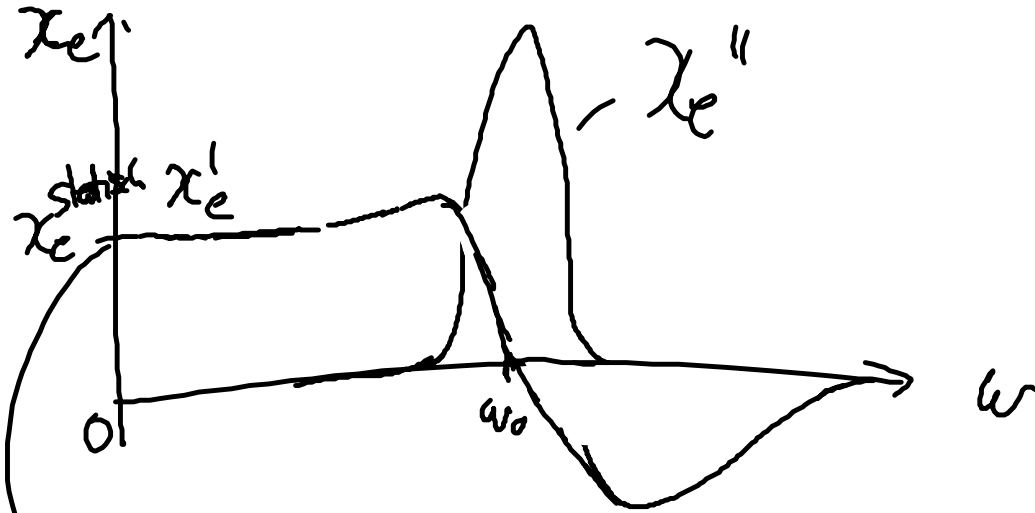
$$\chi_e(\omega) \approx \alpha(\omega)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i \omega} \stackrel{!}{=} \chi_e'(\omega) + i \chi_e''(\omega)$$

Lorenz-Oszillator-Modell

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \chi_e'(\omega) &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ \chi_e''(\omega) &= \frac{\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \end{aligned} \right.$$

dynamische
die Leitfähigkeit
Suszeptibilität



statischer Grenzfall ($\omega \rightarrow 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$)

Bemerkungen

- Limen kleiner Frequenzen: $\chi_e''(\omega) \rightarrow 0$

$\Rightarrow \chi_e$ wird rein reell

- $\chi_e'' = \text{Im } \chi_e(\omega) = 0$ für $f=0$ (wie erwartet)

- Bei $\omega = \omega_0$: „Resonanz“

hier hat χ_e'' ein scharfes Peak
und χ_e' wechselt das Vorzeichen

Physikalische Bedeutung =

$$\omega_0^2 = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$$

Bei ω_0 wird am meisten Energie von der Welle in das Medium dissipiert
 („Resonanzabsorption“)

- $\omega \gg \omega_0$: $\chi_e''(\omega)$ sehr klein

Im Bereich $\omega > \omega_0$:

$$\chi_e'(\omega) < 0$$

→ die Antwort des Systems auf das äußere Feld ist gegenphasig

(generell: $\frac{d\chi_e''(\omega)}{d\omega} < 0$)

„anomale Dispersion“

~~• Reale Medien~~

• Reale Medien (Wasser)

