

## VI.9. Dispersion (dielektrisch)

$$\mu \approx 1 \\ \rightarrow n \approx \sqrt{\epsilon}$$

allgemein sind  $\epsilon$  und damit auch  $n$  frequenzabhängig!  
 $\epsilon(\omega), n(\omega)$

Zugehörige Maxwellbeziehungen (homogenes, isotropes Medium)

Polarsatz:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(\underline{r}, t - t') \underline{E}(\underline{r}, t')$$

betrachte  
also nur zeitl. Dispersion, die Antwort des Systems  
ist lokal im Ort!

betrachte Kausalität:

Die Antwortfunktion  $\chi_e(\underline{r}, t - t')$   
muss kausal sein, d.h.

$$\chi_e = 0 \quad \text{für } t' > t$$

Fouriertransformierte der Maxwellgleichung.

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

analog für  $\underline{E}$ ,  $\underline{\chi}_e$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int dt' \int d\omega' \int d\omega \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega') \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t + i\omega' t'} e^{-i\omega t'}$$

benutzt

$$\frac{1}{2\pi} \int dt' e^{-i(\omega - \omega')t'} = \delta(\omega' - \omega)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

soll für  $\omega$  gelten

$$\Rightarrow \underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) = \epsilon_0 \underline{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega)$$

häufig vernlässigt man die  
Ortsabhängigkeit (homogener Medium)

$$\underline{\hat{P}}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{\hat{E}}(\omega)$$

benutze:

$$\epsilon(\omega) := 1 + \chi_e(\omega)$$

frequenzabhängig  
und komplex!

$$= \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega)$$

es gilt:

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi_e(t') e^{i\omega t'}$$

Kausalität:

(wahrheit  $\hat{\chi}$ )  
 $\chi_e(t-t') = 0$

für  $t' > t$

dh.  $\hat{\chi} < 0$ )

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt' \chi_e(t') e^{i\omega t'}$$

aufordern:

Die Funktion  $\chi_e(\epsilon)$  ist reell

(da  $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$  reelle Materialbeziehung)

Dann

$$\epsilon^*(\omega) = 1 + \sqrt{\frac{1}{\pi}} \int d\epsilon' \underbrace{\chi_e^*(\epsilon')}_{= \chi_e(\epsilon')} e^{-i\omega\epsilon'}$$

$$- \epsilon(-\omega)$$

Folgerungen für Wellenausbreitung in dem Medium

genereller Ansatz:

$$k = \frac{n}{c} \omega \iff k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \omega^2$$

(k)

jetzt:  $n^2$  bzw  $c$  sind

frequenzabhängig  
und (i.a.) komplex!

$$\text{also } n \rightarrow \tilde{n} = \bar{n}(\omega) + i\gamma(\omega)$$

$$n^2 \rightarrow \tilde{n}^2 = \bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma$$

wir haben:

$$\epsilon \rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \epsilon'(\omega) &= (\bar{n}(\omega))^2 - (\gamma(\omega))^2 \\ \epsilon''(\omega) &= 2\bar{n}(\omega)\gamma(\omega) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Spezialfall:

da  $\bar{n} \neq 0$

•  $\epsilon'' = 0 \rightarrow \gamma = 0$ , also  $n = \bar{n} = \sqrt{\epsilon'}$

ungedämpfte Welle!

•  $\epsilon'' > 0, \gamma > 0$  gedämpfte Welle  
(siehe Diskusst. in Kap. VI.8)

Erinnerung:  
 $\underline{k} = k \underline{\hat{r}}$   
 $k = \frac{\tilde{n}(\omega)}{c} \omega$

„dissipativer“ Fall

(„Absorption“)

Der Frequenzbereich  $\varepsilon'' < \varepsilon'$  heißt

„Transparenzgebiet“ (da dort keine Absorption)

Wichtige Folgerungen aus der Frequenzabhängigkeit

$$k = \frac{\tilde{n}}{c} \omega$$

$$\underbrace{\operatorname{Re} k}_{k'} = \frac{\omega}{c} \tilde{n}(\omega)$$

bestimmt die Phasengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{phase}} = \frac{c}{\tilde{n}(\omega)}$$

Betrachte nun Gruppengeschwindigkeit der Well.

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{d(\omega \tilde{n}(\omega)) / d\omega}$$

$$= \frac{c}{\hbar + \omega \frac{d\hbar}{d\omega}} \neq \frac{c}{\hbar(\omega)} = 0 \text{ phase!}$$

## Kramers - Kronig-Relationen:

Allgemein-gültige Zusammenhänge

zwischen Real- und Imaginärteil der dielektr. Funktion bzw. den Dispersionsindizes

folgt aus der Kausalität der entsprechenden Antwortfunktion in der Zeitdomäne

Korrekturen:

$$\text{Re } \chi_e(\omega) = \epsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } \chi_e(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\begin{cases} \epsilon = 1 + \chi_e \\ \text{Re } \epsilon = 1 + \text{Re } \chi_e \\ \text{Im } \epsilon = \text{Im } \chi_e \end{cases}$$

$$\frac{\epsilon''(\omega)}{\text{Im } \chi_e(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } \chi_e(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

Dabei ist  $\mathcal{P}$  der sogenannte Hauptwert  
des Integrals.

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

## VI.10. Mikroskopisches Modell der Dispersion

Ausgangspunkt:

mikroskop. Modell der statischen Polarisation  
emitt. Atoms (wie in Kap. VI.4)

$$\ddot{r}(t) + \omega_0^2 \underline{r}(t) + \underbrace{\gamma}_{\text{Reibkoeffiz.}} \dot{r}(t) = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{lokal}}(t)$$

$\underline{r}$ : Abstand des Schwingpunktes der positiven  
und negativen Ladg in einem Atom



$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3} \quad (\text{s. VI.4})$$

neu: Dämpfungssystem:

beschreibt physikalisch ~~die~~ Wechselwirkung mit der Umgebung!

Das Modell heißt "Lorentz-Oszillator"  
(gedämpfte harmonische Oszillatoren)

Erinnerung statischer Fall:

induziertes Dipolmoment in einem Atom

$$\underline{p} = Ze \underline{r} \quad (*)$$

im stat. Fall:  $\underline{r} \rightarrow \underline{r}^{\text{eq}}$  <sup>Gleichgewicht</sup>  
(d.h.  $\dot{\underline{r}}^{\text{eq}} = \dot{\underline{r}}^{\text{eq}} = 0$ )

$$\Rightarrow \underline{p}^{eq} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{lokal}$$

$$\Rightarrow \underline{p} = \alpha \underline{E}^{lokal} \quad \text{mit } \alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$$

↑ Teilchendichte  
↑ Polarisierbarkeit

Polarisation :  $\underline{P} = n \underline{p} = n \alpha \underline{E}^{lokal}$

dynamische

⊕  $\underline{E}^{lokal}(t) = \underline{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\underline{P}(t) = n \underline{p}(t) = \underline{P}_0 e^{-i\omega t}$

↖ vernachlässige Kondensatoreffekt

und  $\underline{p}(t) = Ze \underline{r}(t)$

Einsetzen in die Oszillationsgleichung

$$\ddot{\underline{P}}(t) + \gamma \dot{\underline{P}}(t) + \omega_0^2 \underline{P}(t) = n \frac{Ze^2}{m_e} \underline{E}^{lokal}(t)$$

benutze ⊗

$$\dot{\underline{P}} = -i\omega \underline{P}$$

$$\ddot{\underline{P}} = -\omega^2 \underline{P}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - \gamma i \omega + \omega_0^2) \underline{P}_0 = \omega_p^2 \epsilon_0 \underline{E}_0$$

$$\text{mit } \omega_p^2 = \frac{n e^2 z}{m_e \epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i \omega} \underline{E}_0$$

$$= \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

frequenzabhängige  
Polarisierbarkeit

Betrachte die Def. der  
eigenlichen dielektrischen Suszeptibilität

$$\underline{P}(\omega) \stackrel{!}{=} \epsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}(\omega)$$

benutze die Lorentz-Beziehung (Kap. VI.4)

$$\underline{E}^{\text{Lokal}} = \underline{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

Kombiniere

$$\Rightarrow \underline{P}_0 \left(1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}\right) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

$$\rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}}$$

direkte Verallgemeinerung der bisherigen  
Zusammenhang im stat. Fall!

Betrachte Systeme mit kleiner Dichte.

beachte:  $\alpha(\omega) \sim \omega_p^2 \sim n$  <sup>Dichte</sup>

Im Falle  $\alpha$  gilt also:  $\frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{3}} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \alpha$

Wir setzen also näherungsweise

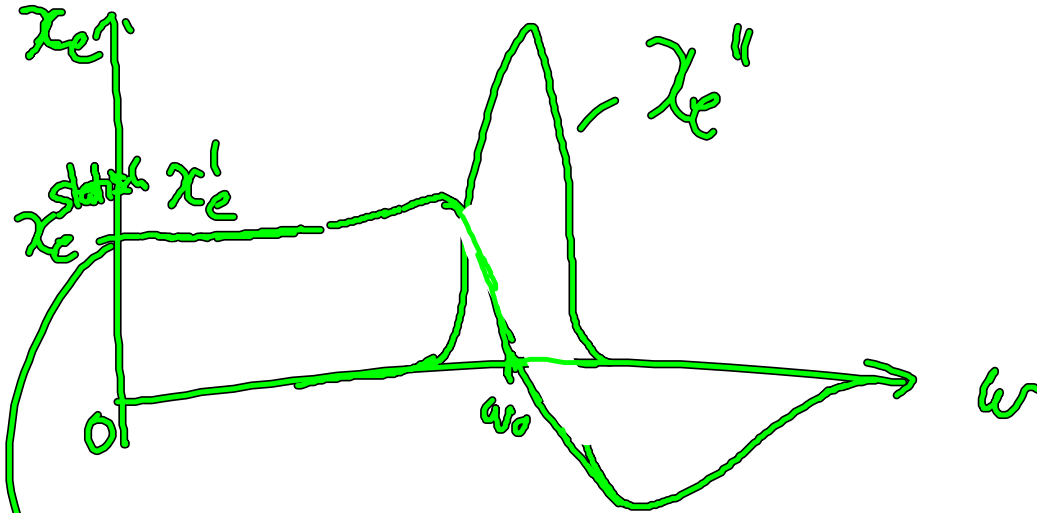
$$\chi_e(\omega) \approx \alpha(\omega)$$

$$= \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \delta i \omega} \stackrel{!}{=} \chi_e'(\omega) + i \chi_e''(\omega)$$

Levitz-Oszillator-Modell

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \chi_e'(\omega) &= \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2} \\ \chi_e''(\omega) &= \frac{\delta \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \delta^2 \omega^2} \end{aligned} \right.$$

dynamische dielektrische Suszeptibilität



statistischer Grenzfall ( $\omega \rightarrow 0$  bzw.  $t \rightarrow \infty$ )

Bemerkungen

- Linear kleine Frequenzen:  $\chi_e''(\omega) \rightarrow 0$

$\Rightarrow \chi_e$  wird nicht null  
•  $\chi_e'' = \text{Im } \chi_e(\omega) = 0$  für  $f = 0$  (nicht erlaubt)

• Bei  $\omega = \omega_0$ : „Resonanz“

hier hat  $\chi_e''$  ein scharfes Peak  
und  $\chi_e'$  wechselt das Vorzeichen

Physikalische Bedeutung:

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$$

Bei  $\omega_0$  wird am meisten Energie von der Welle in das Medium dissipiert  
(„Resonanzabsorption“)

•  $\omega \gg \omega_0$ :  $\chi_e''(\omega)$  sehr klein

Im Bereich  $\omega > \omega_0$ :

$$\chi_e'(\omega) < 0$$

→ die Antwort des Systems auf das äußere Feld ist gegenphasig

(generell:  $\frac{d\chi_e(\omega)}{d\omega} < 0$ )

„anomale Dispersion“

~~„Harte Materie“~~

• Reale Materie (Wasser)

