

VII

Spezielle Relativitäts-

theorie

Motivation: elektromagnetischen Phänomene gekennzeichnet durch sehr hohe Geschwindigkeiten $v \leq c$

Grundfrage: Ändert sich etwas an Maxwell-Gleichungen?
physikalischen Zusammenhängen?

Mechanik experimentell: für $v \leq c$ müssen Gesetze modifiziert werden

("klassische Mechanik" aus Theo I gilt nur für $v \ll c$!)

Elektrodynamik?

Wir werden sehen, dass sich die Maxwell-Gleichungen nicht ändern

→ MWG sind forminvariant unter Lorentz-Transformationen

VII . 1 . Inertialsysteme , Galilei - Transformationen

(Erinnerung : Mechanik)

→ Inertialsystem : ausgezeichnetes Koordinatensystem : gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander

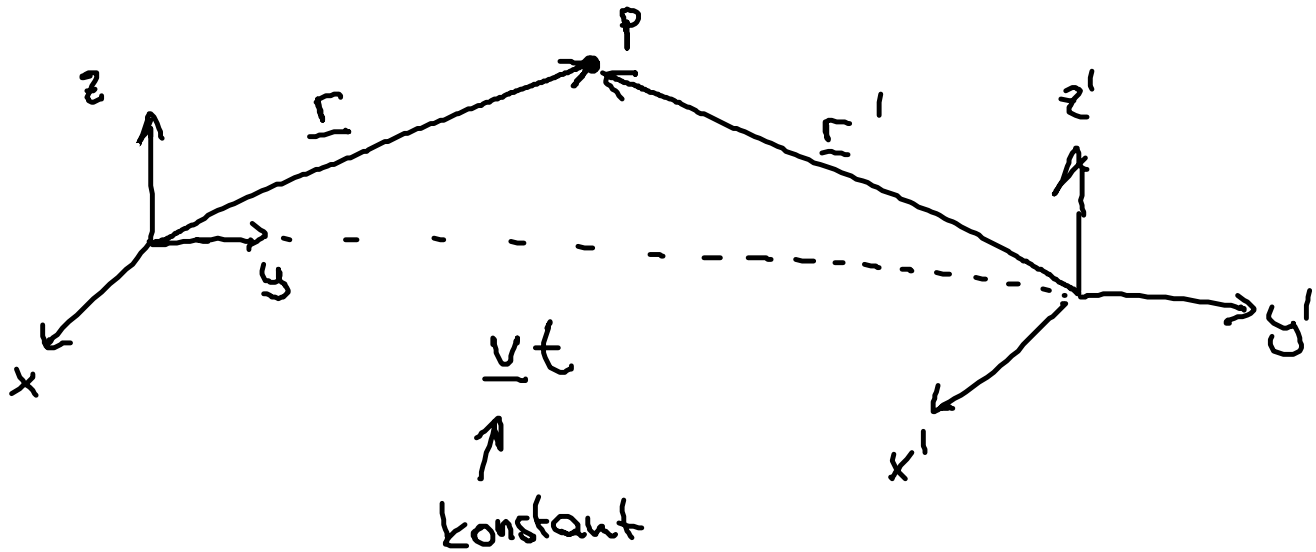
Newton'sches Trägheitsgesetz :

$$\underline{F} = m \underline{a} = m \underline{\ddot{r}}$$

Beachte: obige Definition impliziert, dass beschleunigte oder rotierende Systeme keine Inertialsysteme sind

↓
Scheinkräfte : Coriolis-, Zentrifugal-

Übergang zwischen 2 Inertialsystemen Σ, Σ'



bei $t=0$ $\Sigma = \Sigma'$

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}' + \underline{v}t} \quad (*) \quad \text{Galilei-Transformation}$$

Bemerkungen:

a) Folgerung aus (*)

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}' + \underline{v}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}'$$

$$\Rightarrow \underline{F} = m \ddot{\underline{r}} = m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F}'$$

Newton'sches Trägheitsgesetz gilt in beiden Systemen

b) Die Zeit wird bei Galilei-Transformationen nicht variiert

Die Zeit ist "absolut" in klassischer Mechanik.

Frage: Was bedeutet Galilei-Tröfo für elektromagnetische Vorgänge (Lichtausbreitung)

Annahme: Im Ursprung Σ gibt es eine Lichtquelle, die sphärische Wellen emittiert (Kugelwellen)

Einschub: Kugelwellen

genau so wie ebene Wellen Lösung der Maxwell-Gleichungen

$$\underline{E}(\underline{r}) = E_0 \cdot \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \cdot \underline{\hat{e}}_r$$

$$k = |\underline{k}|, \quad r = |\underline{r}|$$

↑
radialer Einheitsvektor

Ausbreitungsgeschwindigkeit

betrachte konstante Phase $kr - \omega t = \text{const.}$

$$r = \frac{\omega}{k} t + \text{const.}$$

$$\dot{r} = \frac{\omega}{k} = c$$

Falls außerdem $t=0$ bei $r=0 \rightarrow \text{const.} = 0$
 $r = ct$

für die Kugelwelle in Σ gilt $r = ct$

$$\dot{r} = c$$

mit $\hat{e}_r = \frac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$

$$\dot{\underline{r}} = c \hat{e}_r$$

für einen Beobachter in Σ'

$$\dot{\underline{r}}' = \dot{\underline{r}} - \underline{v} = c \hat{e}_r - \underline{v}$$

Galilei:

$\Rightarrow \dot{\underline{r}}'$ ist richtungsabhängig und $|\dot{\underline{r}}'| \neq c \dots$

\Downarrow Widerspruch zum Experiment!

Diese besagt, Lichtgeschwindigkeit ist in alle

Richtungen gleich und unabhängig von (geradlinig gleichförmiger) Bewegung des Beobachters relativ zur Quelle.

z.B. Michelson-Morley-Experiment (Nobelpreis 1907)
=> Galilei-Transformation kann so nicht richtig sein!

VII.2. Einsteinsche Postulate

Motivation: Ausgang des Michelson-Morley-Exp.
Faraday'sches Induktionsgesetz

-> Idee der "absoluten Zeit" und des "absoluten Raumes" ist unhaltbar!

Statt dessen:

- Äquivalenzpostulat ("Einsteinsches Relativitätsprinzip")

-> sämtliche physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab

- Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist unabhängig vom Inertialsystem!

(Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit)

Frage nun: wie müssen die Galilei-Transformationen modifiziert werden, um Einsteinsche Postulate zu erfüllen?

VII.3. Die Lorentztransformation

Betrachte 2 Inertialsysteme Σ, Σ'

- Σ ruht
- Σ' bewegt sich mit $\underline{v} = \text{const}$
- bei $t=0$ $\Sigma = \Sigma'$

für eine Kugelwelle im ruhenden System gilt

$$|\underline{r}| = r = ct$$

$$\Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (*)$$

Aus dem zweiten Einsteinschen Postulat folgt: Auch in Σ' muss ^{sich} die Welle als Kugelwelle mit $v=c$

fortpflanzen!

-> es muss gelten

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (**)$$

wichtig: Die Zeit t muss auch mittransformiert werden.

Aus (*) und (***) folgt die Invarianzbeziehung

$$c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Führe neue Notation ein ("Vierervektor")

$$X^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

"Vierervektor" im "Minkowski-Raum"

mit $x^0 = ct$ Zeitkomponente

$x^1, x^2, x^3 = x, y, z$ Raumkomponenten

Umschreiben der Invarianzbedingung

$$\underbrace{(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^3 (x^\mu)^2}_{S^2} = \underbrace{(x'^0)^2 - \sum_{\mu=1}^3 (x'^\mu)^2}_{S'^2}$$

abstrakt gesprochen

Das "Längenquadrat" (s^2) des Vierervektors bleibt erhalten.

↔ Das Längenquadrat s^2 ist eine "Lorentz-Invariante"!

Wie lautet die konkrete Transformation?

Betrachte sog. "spezielle Lorentz-Transformation"

$\hat{=}$ Σ u. Σ' haben parallele Achsen

(Bsp $\underline{v} \parallel \hat{e}_z = \underline{x}^3$ Einheitsvektor in z)

Allgemeiner Ansatz:

$$(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

- linear, da sonst gleichförmige Bewegung in Σ keine gleichförmige Bewegung in Σ' mehr wäre
- $L_{\mu\lambda}$ sind Elemente einer Transformationsmatrix $\underline{\underline{L}}$

aus $\underline{v} \parallel \underline{x^3}$ folgt $\Rightarrow \cdot x'^1 = x^1$
 $x'^2 = x^2$
 x'^0 und x'^3 dürfen nicht
 von x^1, x^2 abhängen!

$$\Rightarrow \underline{L} = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & L_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_{30} & 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Nutze nun die Invarianz des Längenquadrats

$$(x'^0)^2 - \cancel{(x'^1)^2} - \cancel{(x'^2)^2} - (x'^3)^2 = \underbrace{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}_{= -\cancel{(x^1)^2} - \cancel{(x^2)^2}}$$

$$\Rightarrow (x'^0)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^3)^2 \quad (* *)$$

benutze
 (*)

$$x'^0 = L_{00} x^0 + L_{03} x^3$$

$$x'^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3$$

Einsetzen in (*) b), Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow L_{00}^2 - L_{30}^2 = 1$$

$$L_{33}^2 - L_{03}^2 = 1$$

$$L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33} = 0$$

(Es gilt $\cosh^2 X - \sinh^2 X = 1$)

$$\Rightarrow L_{33} = L_{00} = \cosh X$$

$$L_{30} = L_{03} = \sinh X$$

Festlegung von X ?

Beachte Bewegung des Ursprung Σ'

- vom ruhenden System Σ aus gilt

$$x^3 = vt = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} x^0$$

- vom bewegten System Σ' aus gilt

$$x'^3 = 0 \quad (\text{weil Ursprung})$$

andererseits

$$\begin{aligned} x'^3 &= L_{30} x^0 + L_{33} x^3 = \cosh X \cdot x^3 - \sinh X x^0 \\ &= \cosh X \frac{v}{c} x^0 - \sinh X x^0 \\ &= x^0 \left(\frac{v}{c} \cosh X - \sinh X \right) \end{aligned}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{v}{c} \cosh X - \sinh X \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \tanh X = \frac{v}{c}$$

Es folgt

$$\cosh X = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 X}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\sinh X = \cosh X \cdot \tanh X$$

$$= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

führe Notation ein

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Matrix der speziellen Lorentz-Transformation v || x³

explizit:

$$\begin{aligned}
 x' &= x \\
 y' &= y \\
 z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma (z - \beta ct) \\
 t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \gamma (t - \frac{\beta}{c} z)
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Bemerkungen

- Obige Beziehung gilt nur für den Spezialfall $\underline{v} \parallel \hat{z}$!
- Allgemeine Lorentz-Trrafo $\stackrel{!}{=} \underline{v}$ nicht unbedingt parallel zu einer Achse von Σ

man kann zeigen:

$$\underline{L}^{\text{allgemein}} = \underline{L}^{\text{speziell}} \cdot \underline{R}^{\text{Dreh}}$$

\uparrow
 normale Drehmatrix

- im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - (\frac{v}{c})^2}} \approx 1$$

aus (*) wird denn

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = z - vt$$

$$t' = t$$

normale Galilei-Transformation

(für $\underline{v} \parallel \underline{e}_z = \underline{x}^3$)

• Notation $(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^\lambda$

mit der Einstein'schen Summenkonvention

$$(x')^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

über gleiche Griechische Indizes nebeneinander stehender Größen wird summiert