Definition

Welt-Geschwindigkeit

differentielles Längenquadrat

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu$$
$$= c^2 dt^2 - (d\underline{x})^2$$

Lorentzinvariant!

$d\underline{x}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

definiere

$$(*) \quad (d\tau)^2 = \frac{1}{c^2} ds^2$$
$$= (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\underline{x})^2$$

lorentz-invariant!

Interpretation:

im mitbewegten Bezugsystem mit Teilchen im Ursprung: $dx'^\mu = (c\,dt', 0, 0, 0)$

aus $(*)$ folgt: $(d\tau)^2 = (dt')^2$

"Eigenzeit" im mitbewegten Bezugsystem

Weltgeschw.:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

kontravarianter Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

umschreiben:

(Kettenregel) $\Rightarrow$

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau}$$

Was ist $\frac{dt}{d\tau}$??

wir halten

$$c^2(d\tau)^2 = c^2(dt)^2 - (dx)^2$$
$$= c^2(dt)^2\left(1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right)$$
$$= c^2(dt)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \Big| : c^2$$

$$(d\tau)^2 = (dt)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\Rightarrow dt = \gamma\, d\tau$$
$$= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\, d\tau$$

setze das ein in u^μ

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{dx^\mu}{dt} = \gamma\frac{dx^\mu}{dt}$$
$$= \gamma\begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \underline{v} = \frac{dx}{dt}$$

Beachte:

u^μ

Die Raumkomponenten der Vierergeschwindigkeit entsprechen nicht der normalen Geschw. $\underline{v}$, sondern sie unterscheiden sich um Faktor γ

(erst bei $v/c \to 0$, d.h. $\gamma \to 1$ Konsistenz mit bekannter Ausdruck)

Norm

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - (\underline{v})^2) = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^2} = \frac{c^2-v^2}{(c^2-v^2)\frac{1}{c^2}} = c^2$$

b) Viererimpuls, Energie

definiere Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu$$
$$= m\gamma(c, \underline{v}) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m (c, \underline{v})$$

Raumkomponenten

$$(p^1, p^2, p^3) = \overbrace{m}^{m(\gamma)} \gamma (v_x, v_y, v_z)$$
$$= p^{rel}$$

"relativistischer Impuls"

Um die Analogie zum gewöhnl. Impuls zu betonen, führt man die relativistische Masse $m(\gamma) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ein

Die "nackte" Masse nennt man Ruhemasse

Norm des Viererimpulses:

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu$$
$$= m^2 c^2$$

<u>Bezug zur Energie</u>

Definition der relativistischen kinetischen Energie

$$T^{rel} = m\gamma c^2 = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} c^2 \quad (*)$$
$$= m(\gamma) c^2$$

<u>Verknüpfung mit dem Viererimpuls</u>

$$p^\mu p_\mu = m^2\gamma^2 c^2 - m^2\gamma^2 \underline{v}^2$$

$$= \frac{(T^{rel})^2}{c^2} - \frac{m^2\gamma^2 v^2}{(p^{rel})^2}$$

$$p^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix}$$

$$= m^2 c^2$$

vorheriges Ergebnis

auflösen

$$(T^{rel})^2 = m^2 c^4 + m^2\gamma^2 \underline{v}^2 c^2$$
$$= m^2 c^4 + (p^{rel})^2 c^2$$

Alternative Def. zu (*)

Die relativist. kinetische Energie ist also eng mit dem Viererimpuls verknüpft

Bemerkung zum nicht-relativist. Grenzfall von T^{rel}

Ausgangspunkt (*)

$$T^{rel} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

bekannter Fall $\frac{v}{c} \to 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} \to 0$

$$\lim_{x\to 0} (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$T^{rel} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} \dots$$

Für kleine v:

$$T^{rel} \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Zusatzterm}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{nicht-relativistische kinetische Energie}}$$

Die Formel für T^{rel} geht im Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1$ nicht automatisch in die alte Formel über!

Bemerkung zur Impulserhaltung

Aus dem Äquivalenzpostulat

(s. Kap VII. 2)

muß gefolgert werden:

$$p^{rel} \overset{!}{=} \text{const}$$ bei kräftefreier Bewegung in allen Inertialsystemen.

Andererseits gilt (da p^μ kontravarianter 4-Vektor)

$$p'^\mu = L_{\mu\nu}\, p^\nu$$

Bei einer Lorentztransformation werden Raum- und Zeitkomponenten von p^μ gemischt

$\Rightarrow$ die neuen Raumkomponenten von p'^μ hängen auch von T^{rel} ab!

Damit folgt aus $p^{rel} \overset{!}{=} \text{const}$

auch $T^{rel} \overset{!}{=} \text{constant}$

Erhaltung des relativistl. Impulses $\Longrightarrow$ Erhaltung von T^{rel} !!

Daraus ergibt sich eine weitere Folgerung

Wir hatten für $\frac{v}{c}$ klein

$$T^{rel} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

$$= \text{const} \; !$$

also:

Eine Änderung der "normalen" kinetischen Energie $T^{\text{nicht-relativist}} = \frac{1}{2}mv^2$ wird durch die Änderung der "Ruheenergie" mc^2 kompensiert

$\Rightarrow$ Einstein's Äquivalenz von Masse und Energie!

~~Relativ~~ Schlussbemerkung

Die relativist. Formulierung des Wellgesetzes

$$\boxed{m \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu}$$

Vierer-Kraft
Minkowski-Kraft

Vierervektor
Weltgeschwindigkeit

mit $K^\mu = \gamma \left(\frac{\underline{F} \cdot \underline{v}}{c}, F_x, F_y, F_z \right)$

es gilt: Arbeit $\underline{F} \cdot \underline{v} = \frac{d}{dt} \left(T^{rel} \right)$ → Nachtrag

VII.8. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Im letzten Abschnitt:

Die in der nicht-relativist. Mechanik verwendeten Größen müssen verändert werden, wenn man die Grundgesetze lorentzinvariant formulieren will!

$$\left(\text{Beispiel: } \underline{p}^{rel} = m \gamma \underline{v} \underset{i.A.}{\neq} m \underline{v} \right)$$

Wie ist das in der E-Dynamik?

a) Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla\cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

Ladungsdichte

Stromdichte
$$\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\cdot \underline{v}$$

Experimentelle Erfahrung!

Die Gesamtladung q eines Teilchens ~~ist~~ hängt nicht von der Teilchengeschw. ab

→ q ist Lorentzinvariant!

Dies gilt aber nicht für die Ladungs- und Stromdichte!

Grund: Längenkontraktion!

• sei Σ^0 ein mit der Ladung bewegtes Inertialsystem (in Σ^0 ruht die Ladung), und sei

$$\rho_0 = \frac{dq_0}{dV_0}$$ die mitbewegte Ladungsdichte (Ruheladungsdichte)

• sei Σ ein anderes Inertialsystem, das sich mit Geschw. $\underline{v}$ parallel zur z-Achse bewegt

Ladungsdichte in Σ:

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

benutze $dq = dq_0$

$$\Rightarrow \rho = \frac{dq_0}{dV}$$

also muß gelten $\quad \rho_0 \, dV_0 \overset{!}{=} \rho \, dV \quad (*)$

Schreibe:

$$dV = dx\,dy\,dz = dx_0\,dy_0\,\underbrace{dz_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\text{Längenkontraktion}} = \frac{1}{\gamma}\,dV_0$$

Einsetzen in $(*)$

$$\rightarrow \rho \overset{(*)}{=} \frac{dV_0}{dV}\,\rho_0 = \gamma\,\rho_0$$

analog

$$\underline{j} = \rho\,\underline{v} = \gamma\,\rho_0\,\underline{v}$$

Definiere nun die Vierer-Stromdichte

$$\boxed{j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \underline{j})} = (c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0\underline{v})$$

Bezug zur Vierer-Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \gamma(c, \underline{v})$$

$$\rightarrow j^\mu = \rho_0\, u^\mu$$

Ruheladungsdichte!

Zeige, dass j^μ tatsächl. Kontravarianter Vierervektor ist!

Im Ruhesystem Σ^0 ruht das Teilchen, setze es in den Ursprung: $j^\mu_{\Sigma^0} = (c\rho_0, 0, 0, 0)$ da $\underline{v} = 0$ in Σ^0

Lorentztransformation

Σ^0 hat relativ zu Σ die Geschw. $\underline{v}$

$$L_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$j^\mu_\Sigma = L_{\mu\lambda} j^\lambda_{\Sigma_0}$$

$$j^0_\Sigma = \gamma j^0_{\Sigma^0} - \beta\gamma \underbrace{j^3_{\Sigma^0}}_{0} = c\gamma\rho_0$$

$$j^1_\Sigma = 0$$

$$j^2_\Sigma = 0 \qquad j^3_\Sigma = \dots = -\gamma v_z \rho_0 = -v_z\rho$$

Kompatibel mit unserer vorherigen Def. von j^μ!

Zurück zur Kontinuitätsgleichung

wir haben: $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$

betracht. Vierer-Divergenz

Zeitartige Komponente von j^μ

$j^0 = c\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla \cdot \vec{j}$$

benutze $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$ Kontinuitätsgleichung!