Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla\cdot\underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

beachte Längenkontraktion:

$$\rho_0 \longrightarrow \rho = \gamma\rho_0$$

Ruhesystem $\qquad$ bewegtes System

Vierer-Stromdichte: $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$
$= (j^0, j^1, j^2, j^3)$

Vierer-Divergenz

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla\cdot\underline{j} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\underline{j}$$
$$= 0$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

b) Elektromagnet. Potentiale

Erinnerung:

$$\underline{B} = \nabla\times\underline{A}$$
$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

Lorentz-Eichung:

$$\nabla\cdot\underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$$

$\Rightarrow$ Wellengleichung:

$$\Box \underline{A} = \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}$$

$$\Box \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

betrachte 2. Gl. $\Box \left(\frac{1}{c} \Phi \right) = -\frac{1}{c \varepsilon_0} \rho = -\mu_0 (c\rho)$

Die rechten Seiten entsprechen bis ~~auf~~ auf Vorfaktoren den Komponenten von j^μ!

beachte noch:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$= \left(-\partial_\mu \partial^\mu \right) \qquad \text{Skalarprodukt}$$

Führe einen weiteren Vierervektor ein (kontravariant)

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c} \Phi, A_x, A_y, A_z \right) = \left(\frac{1}{c} \Phi, \underline{A} \right)$$

Dann ergibt sich:

$$\boxed{\Box A^\mu = -\mu_0 j^\mu}$$

$$\boxed{-\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu = -\mu_0 j^\mu}$$

Vierer-Wellengleichung
(Lorentzinvariant, weil beide Seiten kontravariante Vierertensoren 1. Stufe sind
$\Rightarrow$ beide Seiten transformieren sich auf dieselbe Weise !)

Und für die Lorentzeichung:

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0 \iff \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{c}\right) + \nabla \cdot \underline{A}$$

Die Definition der Lorentz-Eichung ist lorentzinvariant
$\rightarrow$ daher der Name!

c) Felder

"Vorschau": Für die Feldkomponenten führen wir einen Vierertensor 2. Stufe ein
(dieser erfasst die Komponenten von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ gleichrangig!)

Ausgangspunkt: $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

Komponenten:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2$$

$$= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

$$A^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}$$

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}$$

analog:

$$B_y = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3)$$

$$B_z = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

Komponenten von $\underline{E}$:

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$= -c\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{c}\phi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x\right)$$

$$= c(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1)$$

analog: $E_y = c\,(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2)$

$E_z = c\,(\partial^3 A^0 - \partial^0 A^3)$

Führe ein:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

„Feldstärketensor"

kontravarianter Vierertensor 2. Stufe

(↑ da Tensorprodukt zweier kontravarianter Vierervektoren)

Aus der Definition von $F^{\mu\nu}$ folgt sofort

$$F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$$

$\longrightarrow$ Diagonalelemente des Tensors sind null.

explizit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen

- Zugehöriger kovarianter Tensor

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\, g_{\nu\beta}\, F^{\alpha\beta}$$

mit $g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Man findet

$$\underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Kontraktion eines Vierertensors 4. Stufe}} = 2\left(\underline{B}^2 - \frac{1}{c}\underline{E}^2\right)$$

Vierer-Skalar! (invariant unter Lorentz-Trafo)

$\Rightarrow$ Invariante des elektromagnet. Feldes!

- Verhalten von $F^{\mu\nu}$ bei Wechsel des Inertialsystems ($\Sigma \to \Sigma'$)

$$\left(F^{\mu\nu}\right)' = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$ Beim Wechsel des Inertialsystems mischen sich die Komponenten von $\underline{B}$ und $\underline{E}$!

Konkret:

$$\underline{E}' = \gamma\left(\underline{E} + c\left(\underline{\beta} \times \underline{B}\right)\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\underline{\beta}\left(\underline{\beta}\cdot\underline{E}\right)$$

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}$$

$$\underline{B}' = \gamma\left(\underline{B} - \frac{1}{c}\left(\underline{\beta}\times\underline{E}\right)\right) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\underline{\beta}\left(\underline{\beta}\cdot\underline{E}\right)$$

(oder $\underline{B}$?

d) Maxwell-Gleichungen

zunächst die inhomogene Gleichung

$$\nabla\cdot\underline{E} = \rho/\varepsilon_0 \Leftrightarrow \nabla\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right) = \mu_0 j^0$$

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right) = \mu_0 \underbrace{j}_{\text{Komponenten des Viererstroms } j^\mu}$$

Ausprobieren:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{c}\underline{E}\right) = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

$$= \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \underset{\text{da } F^{00}=0}{=} \underbrace{\partial_\alpha F^{\alpha 0}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\Longrightarrow \partial_\alpha F^{\alpha 0} = \mu_0 j^0$$

$$\left(\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\underline{E}\right)\right)_x$$

$$= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}E_x\right)$$

$$= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} \underset{F^{11}=0}{=} \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

analog für die y- und z-Komponente

$$\boxed{\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta}\ (*)$$

Zusammenfassung der inhomogenen Maxwell-Gl.!

$\beta = 0, 1, 2, 3$

konkret

$\beta = 0 \quad \hat{=} \quad \nabla \cdot \underline{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\beta = 1,2,3 \quad \hat{=} \quad \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c}\underline{E} = \mu_0 \underline{j}$

Linke Seite von (*)

Kontravarianter Tensor dritter Stufe (da 2 Indizes gleich)

$\Rightarrow$ (Kontravarianter) Vierervektor!

$\Rightarrow$ beide Seiten transformieren sich gleich

$\Rightarrow$ Die inhomogenen Maxwell-Gl gelten in allen Inertialsystemen!

betrachte nun die homogenen Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{c} \underline{E} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0$$

"Probiere": $\nabla \cdot \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21}$$

$$= \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12}$$

$$= 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \\ \partial_\mu = -\partial^\mu \\ \quad \mu = 1,2,3 \end{array}}$$

$$\left(\nabla \times \frac{1}{c} \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \right)_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{c} E_z \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{c} E_y \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$= \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23}$$

$$= -\left(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} \right) = 0$$

analog für die y, und z-Komponente

$$\boxed{\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0}$$

$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$

betrachte den Fall $\alpha = \beta$

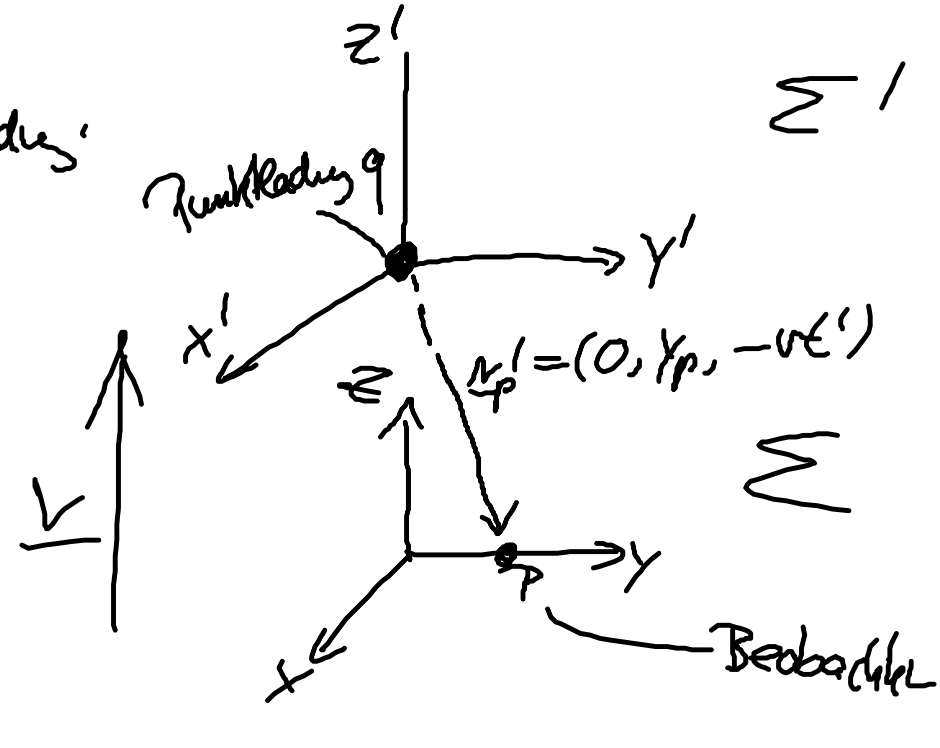
$$\Rightarrow \partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \partial^\alpha \underbrace{F^{\gamma\alpha}}_{-F^{\alpha\gamma}} + \partial^\gamma \underbrace{F^{\alpha\alpha}}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \partial^\alpha \left(F^{\alpha\gamma} - F^{\alpha\gamma}\right) = 0 \quad \text{trivial!}$$

VII. 9. Anwendungsbeispiel für Transformation der Felder

Bewegte Punktladung:

Σ Inertialsystem



$\underline{r}_p = (0, y_p, 0)$

Frage: Welche Felder sieht der Beobachter P, wenn sich q mit $v = \text{const}$ entlang der z-Achse bewegt?

Zunächst: Felder Σ'

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{r}'}{r'^3}$$

$\underline{E}$-Feld einer Punktladung

$$\underline{B}' = 0$$

beachte: $\underline{r}_p' = \underline{r}_p'(t')$ da sich die Beobachtungsposition von Σ' aus gesehen zeitl. ändert

$$\underline{E}' = \underline{E}'(t') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^3}(0, y_p, -vt')$$

mit $r' = \sqrt{y_p^2 + v^2 t'^2}$

<u>Felder in Σ'</u>

$$E_x = \gamma(\underbrace{E_x'}_{0} + \beta c \underbrace{B_y'}_{0}) = 0$$

$$E_y = \gamma(E_y' - \beta c \underbrace{B_x'}_{0})$$

$$\boxed{t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}\underbrace{z_p}_{0}) = \gamma t}$$

$$= \gamma E_y' = \frac{\gamma y_p}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}$$

$$E_z = E_z' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-\gamma v t)}{\sqrt{y_p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}$$

Wichtige Eigenschaft:

E ist nicht mehr kugelsymmetrisch!

B-Feld

$$B_x = \gamma(\underbrace{B_x'}_{0} - \beta/c\, E_y') = -\gamma \beta/c\, E_y' - \beta/c\, E_y$$

$B_y = \ldots = 0$, $B_z = \ldots = 0$

hier: $\underline{B}$-Feld hat nur x-Komponente

Für allg. Geschwindigkeitsrichtung $\underline{v}$ folgt (mit $\underline{B}' = 0$)

$$\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}$$

$$\underline{B} = \frac{\gamma}{c} \left(\underline{\beta} \times \underline{E}' \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \gamma}{r'^3} \left(\underline{v} \times \underline{r}' \right)$$

Für $\gamma = 1$ folgt das Biot-Savart-Gesetz!