

## Vektorübergang

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

beide Längeneinheiten:

$$\rho_0 \longrightarrow \rho = \gamma \rho_0$$

Ruhsystem                      bewegtes System

Vier-Stromdichte:

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}, j_x, j_y, j_z)$$
$$= (j^0, j^1, j^2, j^3)$$

Vier-Divergenz

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

## b) Elektromagnet - Potentiale

---

Gleichungen:       $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$

$$\underline{\mathbf{E}} = -\nabla \phi - \dot{\underline{\mathbf{A}}}$$

Lorenz-Eichung:

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{A}} + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$$

⇒ Wellengleichung:

$$\square \underline{A} = \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \underline{A} = -\underline{j}$$

$$\square \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

betrachte 2. Gl.  $\square \left( \frac{1}{c} \phi \right) = -\frac{1}{c \epsilon_0} \rho = -\mu_0 (c \rho)$   $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$

Die rechten Seiten entsprechen ins auf  
Verfaktoren den Komponenten von  $\underline{j}$ !

beachte noch:

$$\square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$= (-\partial_\mu \partial^\mu)$$

Skalarprodukt

Führe einen weiteren Vektor  $A^0$  ein (Lorenzpotential)

$$A^\mu = \left( \frac{1}{c} \phi, A_x, A_y, A_z \right) = \left( \frac{1}{c} \phi, \underline{A} \right)$$

Dann ergibt sich:

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

$$-\partial_\nu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Vierer-Wellengleichung  
 (Lorentzinvariant, weil beide Seiten Lorentzvariant  
 Vierervektoren 1. Stufe sind)

⇒ beide Seiten transformieren sich auf  
 dieselbe Weise !)

Und für die Lorenzeichung:

$$\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c} \dot{\Phi} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Phi}{c} \right) + \nabla \cdot \underline{A} = 0$$

Die Definition der Lorenz-Eichung  
 ist Lorentzinvariant

→ daher der Name!

### c) Felder

"Vorstudium": Für die Feldkomponenten führen wir einen  
 Vierervektor 2. Stufe ein

(dieser erlaubt die Komponenten von  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$   
 gleichrangig!)

Ausgangspunkt:  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

Komponenten:

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \\ \partial_\mu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix} \\ \partial^\mu &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix} \end{aligned}$$

analog:

$$\begin{aligned} B_y &= -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \\ B_z &= -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) \end{aligned}$$

Komponente von  $\underline{E}$ :

$$\underline{E} = -\nabla \phi - \dot{\underline{A}}$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$= -c \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{c} \phi \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_x \right)$$

$$= c (\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1)$$

analog:

$$E_y = c(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2)$$
$$E_z = c(\partial^2 A^0 - \partial^0 A^2)$$

Führe ein:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

„Tensorsförmige Darstellung“

Kontinuirliche Werte 2. Stufe  
( $\uparrow$  da Tensorprodukt zweier kontinuierlichen  
Vektoren)

Aus der Definition von  $F^{\mu\nu}$  folgt sofort

$$F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$$

$\rightarrow$  Diagonalelemente des Tensors  
sind Null!

explizit:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- Zugehöriger kovariante Tensor

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} \quad \text{mit } g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Man findet

$$\underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} = 2 \left( \underline{B^2} - \frac{1}{c} \underline{E^2} \right)$$

Kontraktion eines  
Kovarianten 4. Stufe

Lorenz-Skalar! (invariant unter Lorentz-Transf.)

→ Invariant des elektromagnet.  
Feldes!

- Verhalten von  $F^{\mu\nu}$  bei Wechsel des Inertialsystems ( $\Sigma \rightarrow \Sigma'$ )
- $$(F^{\mu\nu})' = \Lambda_{\mu\alpha} \Lambda_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

→ Beim Wechsel des Inertialsystems mischen sich die Komponenten von  $\underline{B}$  und  $\underline{E}$ !

Konkret:

$$\underline{E}' = \gamma (\underline{E} + c (\underline{\beta} \times \underline{B})) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E})$$

$$\underline{B}' = \gamma (\underline{B} - \frac{1}{c} (\underline{\beta} \times \underline{E})) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \underline{\beta} (\underline{\beta} \cdot \underline{E})$$

$\underline{\beta} = \frac{\underline{v}}{c}$   
(oder  $\underline{\beta}$ ?)

d) Maxwell-Gleichung

zunächst die inhomogene Gleichung

$$\nabla \cdot \underline{E} = \rho / \epsilon_0 \Leftrightarrow \nabla \cdot (\frac{1}{c} \underline{E}) = \mu_0 j^0$$

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \underline{E} \right) = \mu_0 \underline{j}$$

Komponente des  
Vektors  $\underline{j}$

Ausprobieren:

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \underline{E} \right) = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{c} \left( \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \right) = \partial_\alpha F^{\alpha 0}$$

Einstein'sche  
Summation

da  $F^{00} = 0$

$$\Rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha 0} = \mu_0 j^0$$

$$\left( \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \underline{E} \right) \right)_x$$

$$= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} E_x \right)$$

$$= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} = \partial_\alpha F^{\alpha 1}$$

$F^{\alpha\alpha} = 0$

analog für die  $y$ - und  $z$ -Komponente



$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 j^\beta \quad (*)$$

Zusammenfassung  
der in-homogenen  
Maxwell-Gl.!

$$\beta = 0, 1, 2, 3$$

Kontrakt

$$\beta=0 \quad \Leftarrow \quad \underline{\underline{F}}_{\cdot E} = \underline{\underline{P}}_{\cdot E}$$

$$\beta=1,2,3 \quad \Leftarrow \quad \underline{\underline{F}}_{\cdot B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{A}}_{\cdot E} = \underline{\underline{P}}_{\cdot j}$$

Linke Seite von (\*)

Kontraktierte Tensoren dritter Stufe (da 2 Indizes gleich)  
 $\Rightarrow$  (Kontinuitäts) Viererdivergenz!

$\Rightarrow$  beide Seiten transformieren  
sich gleich

$\Rightarrow$  Die inhomogenen Maxwell-Gl.  
gelten in allen Inertialsystemen!

betrachte nun die homogene Maxwell-Gl.

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \left( \frac{1}{c} \underline{E} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

"prüfen":  $\nabla \cdot \underline{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} \\ &\quad - \partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= -F^{\nu\mu} \\ \partial_\mu &= -\partial^\mu \\ \mu &= 1, 2, 3 \end{aligned}}$$

$$\left( \nabla \times \frac{1}{c} \underline{E} + \frac{1}{c} \dot{\underline{B}} \right)_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{c} E_z \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{c} E_y \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$= \partial_2 F^{30} + \partial_3 F^{02} - \partial_0 F^{23}$$

$$= -(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23}) = 0$$

analog für die  $y$ , und  $z$ -Komponente

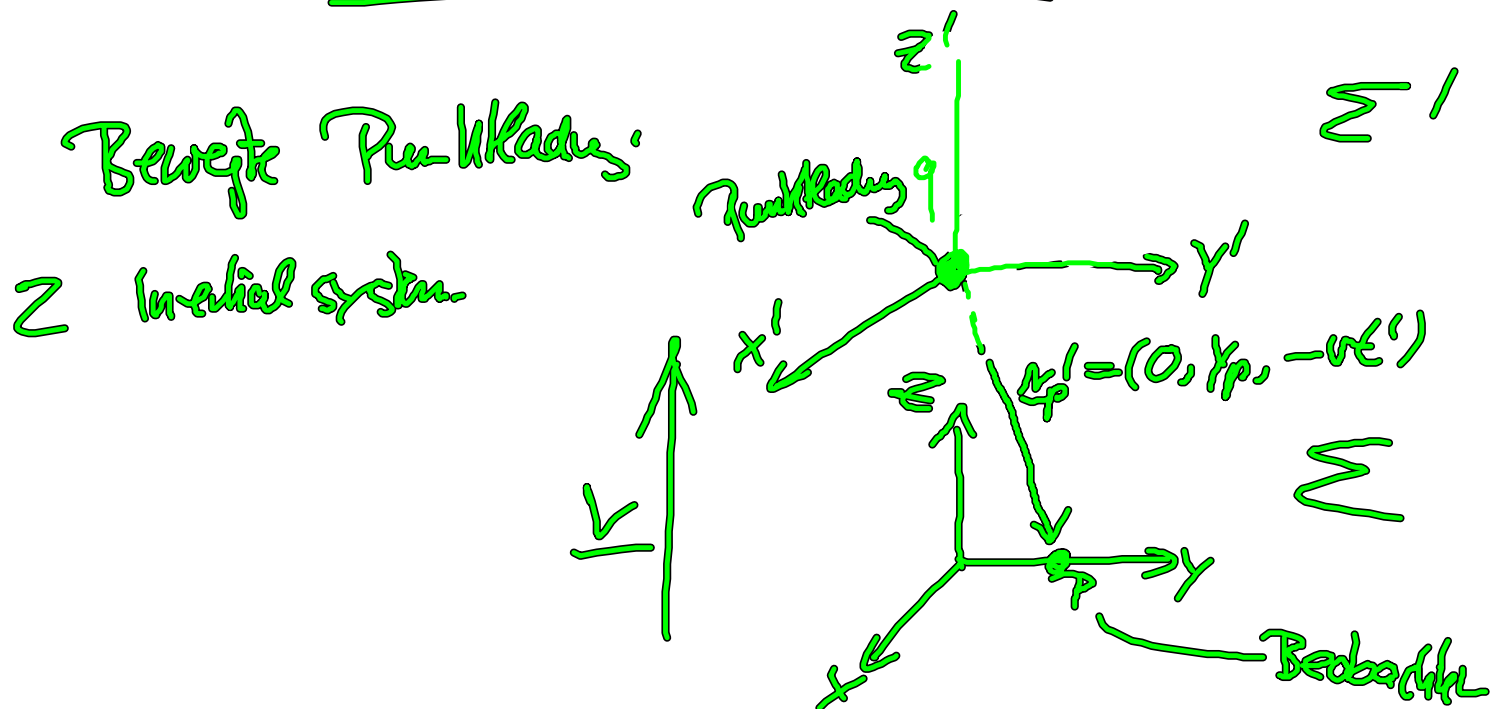
$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$$

betrachte den Fall  $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned} \rightarrow \partial^\alpha F^{\alpha\gamma} + \underbrace{\partial^\alpha F^{\gamma\alpha}}_{-F^{\alpha\gamma}} + \underbrace{\partial^\gamma F^{\alpha\alpha}}_0 &= 0 \\ \rightarrow \partial^\alpha (F^{\alpha\gamma} - F^{\gamma\alpha}) &= 0 \quad \text{trivial!} \end{aligned}$$

## VII. 9. Anwendungsbeispiel für: Transformation der Felder



Frage: Welche Felder sieht  
 der Beobachter  $P$ , wenn sich  $q$  mit  $v$  entlang  
 der  $z$ -Achse bewegt?  $N_p = (0, y_p, 0)$

Zunächst: Felder  $\Sigma'$

$$\underline{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{z}'}{r'^3}$$

$\underline{E}$ -Feld eines  
 Punktladung

$$\underline{B}' = 0$$

beachte:  $N_p' = N_p(t')$

da sich die Beobachter  
 von  $\Sigma'$  aus gerade  $z$ -Achse aus

$$\underline{E}' = \underline{E}'(t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3} (0, y_p, -vt')$$

$$\text{mit } r' = \sqrt{y_p^2 + v^2 t'^2}$$

Felder in  $\Sigma'$

$$E_x = \gamma(\underbrace{E_x'}_0 + \beta c \underbrace{B_y'}_0) = 0$$

$$E_y = \gamma(E_y' - \beta c \underbrace{B_x'}_0)$$

$$= \gamma E_y' = \frac{\gamma \gamma_p}{\sqrt{\gamma_p^2 + \gamma^2 v^2 \epsilon^2}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \epsilon' &= \gamma \epsilon - \frac{\gamma v \gamma_p}{c^2} \\ &= \gamma \epsilon \end{aligned}}$$

$$E_z = E_z' = \frac{q}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-\gamma v t)}{\sqrt{\gamma_p^2 + \gamma^2 v^2 t^2}}$$

Wichtige Eigenschaften:

$E$  ist nicht mehr kugelsymmetrisch!

B-Feld

$$B_x = \gamma(\underbrace{B_x'}_0 - \beta/c E_y') = -\gamma \beta/c E_y' - \beta/c E_y$$

$$B_y = \dots = 0, \quad B_z = \dots = 0$$

hier:  $\underline{B}$ -Feld hat nur  
 $x$ -Komponente

Teil allg.  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$  nicht,  $\underline{v}$   
folgt (mit  $B' = 0$ )

$$\underline{B} = \frac{v}{c}$$

$$\underline{B} = \frac{\gamma}{c} (\underline{\beta} \times \underline{E}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \gamma}{r'^3} (\underline{v} \times \underline{r}')$$

Teil  $\gamma = 1$  folgt das Biot-Savart-Gesetz!