VL Elektrodynamik

Andreas Knorr

EW 742 13-14 Die

Inhalt der VL

- Historisches
- Begriffe d. Feldtheorie
- Maxwellgleichungen (Ableitg. aus QM)
- grundlegende Struktur, Erhaltungssätze
- formale Lösungen, Materie als Quelle

- Felder v. bewegten Punktladungen
- einfache Materialmodelle

- Wellenlösungen in Materie / Vakuum
- Quellen v. em. Feldern (Strahlung)
- Optik: Brechung, Reflexion, Beugung
- Führung u. Speicherung v. em. Energie
- relativistische Effekte, Formulierung.
- Quantisierung der Elektr.-Licht WW
- Laser, nichtlineare Optik

1) Historische Bemerkungen

- C. A Coulomb (1736 - 1806) Kraftgesetz
- J.P. Biot (1774 - 1862)
  S. Savart (1791 - 1841) Magnetfelder an Leitern
- M. Faraday (1791 - 1867) Induktionsgesetz
- J. C. Maxwell (1831 - 1879) einheitl. Theorie
- H. A. Lorentz (1853 - 1928) Kraft auf geladene Teilchen

- H. Hertz (1857 – 1894) elmagn. Welle
- W. Heisenberg u.a. (1901 – 1976) Quantisierg. d. Ladungsträger
- P. Dirac (1902 – 1984) Quantisierg. el.magn. Feld
- N. Basov, C. Schawlow, C. Townes Laser
- Manipulation einzelner Photonen
  J. Kimble, A. Zeilinger, u.a.

Grundproblem:

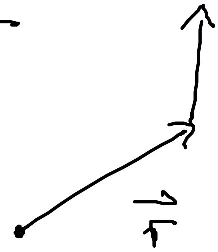
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \text{Maxwellgleichungen f. Felder } \vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{B}(\vec{r},t) \arrow[r, bend left, "\text{Kräfte}"] & \text{Bewegungsgleichg. f. geladene Teilchen } \vec{r}_i(t) \arrow[l, bend left, "\text{Quelle f. Felder}"] \end{tikzcd}$$

Selbstkonsistenzproblem

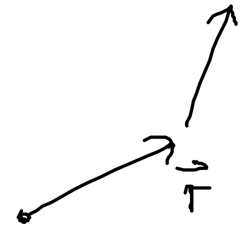
2. Begriffe d. Feldtheorie

2.1. Vektorfelder lokaler Charakter

Vektorfeld $\vec V(\vec r,t)$



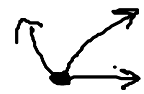
Skalarfeld $\phi(\vec r,t)$

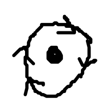


Verwendg. v. Nablaoperationen zur Charakterisierung

$$\vec\nabla = \vec e_x\,\partial_x + \vec e_y\,\partial_y + \vec e_z\,\partial_z$$

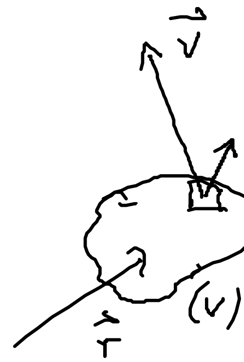
2 Größen:

$\operatorname{div} \vec V(\vec r,t)$ Quelldichte 

$\operatorname{rot} \vec V(\vec r,t)$ Wirbeldichte 

2.2. Quell- und Wirbeldichte

2.2.1 Quelldichte eines Vektorfelds



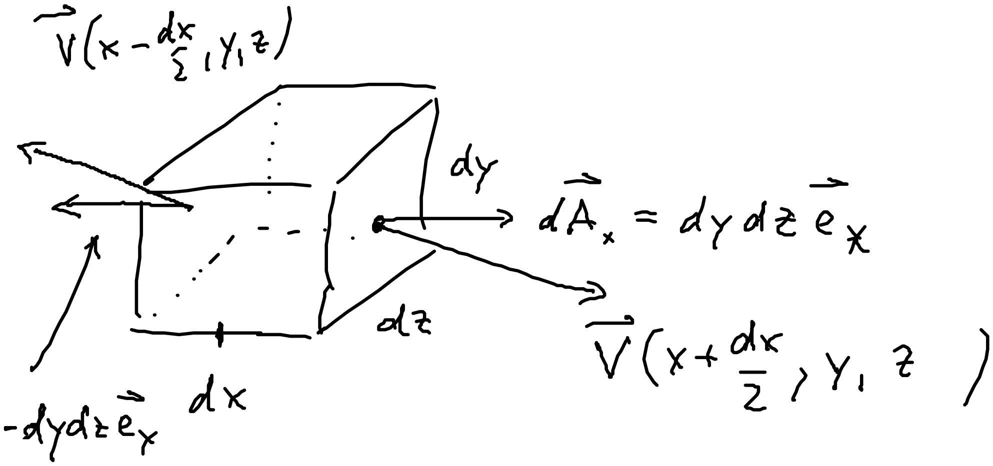
Klein Volum um $\vec r$

$$\operatorname{div} \vec V(\vec r,t) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \underbrace{\int_{(V)} d\vec A' \cdot \vec V(\vec r')}_{\text{abzähl. d. Flusses}}$$

Behauptg: $\boxed{\operatorname{div} \vec V(\vec r) = \vec\nabla \cdot \vec V(\vec r)}$

Plausibel:

$V = dx\,dy\,dz$



links: rechts

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{dx\,dy\,dz}\Big(\underbrace{-V_x(x-\tfrac{dx}{2},y,z)\,dy\,dz + V_x(x+\tfrac{dx}{2},y,z)\,dy\,dz}$$

$$- V_y(x,y-\tfrac{dy}{2},z)\,dx\,dz + V_y(x,y+\tfrac{dy}{2},z)\,dx\,dz$$

$$- V_z \Big)$$

Taylorreihe:

$$\underbrace{\Big(-V_x(x,y,z) + V_x(x,y,z) + \partial_x V_x(x,y,z)\frac{dx}{2} + \partial_x V_x(x,y,z)\frac{dx}{2}\Big)\,dy\,dz}$$

$$\partial_x V_x \; dy\,dz\,dx$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{V}}$$

Quelle durch das Produkt $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ bestimmt.

Bsp: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, Kugelsymmetrie $|\vec{r}| \equiv r$

dh: $\vec{E} = f(r)\,\vec{e}_r$ kann man $f(r)$ berechnen

$$\vec{e}_r = \cos\varphi \sin\vartheta\, \vec{e}_x + \sin\varphi \sin\vartheta\, \vec{e}_y + \cos\vartheta\, \vec{e}_z$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \left(\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi\right) \cdot \left(f(r)\,\vec{e}_r\right)$$

$$= \partial_r f(r) + \frac{f(r)}{r}\, \vec{e}_\vartheta \cdot \partial_\vartheta \vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \cdot \frac{f(r)}{r \sin\vartheta} \sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{\partial_\vartheta \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta}$$

$$\boxed{\partial_\varphi \vec{e}_r = \sin\vartheta\, \vec{e}_\varphi}$$

$$\rightsquigarrow \quad 0 = \frac{2 f(r)}{r} + \partial_r f(r)$$

$$f(r) = \frac{c}{r^2}$$ — Konstante

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{c}{r^2}\, \vec{e}_r}$$

2.2.2. Rotation / Wirbeldichte eines Vektorfeldes

Def: $$\mathrm{rot}\,\vec{V}(\vec{r}) = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\vec{A}' \times \vec{V}(\vec{r}')$$

<u>Behauptg:</u> $$\mathrm{rot}\,\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})$$

<u>plausibel:</u> $V = dx\,dy\,dz$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{v})_i = \frac{1}{V}\Big(-\varepsilon_{ijk}\, dA_j\, V_k\big(\vec{r} - \tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big) + \varepsilon_{ijk}\, dA_j\, V_k\big(\vec{r} + \tfrac{dx_j}{2}\vec{e}_j\big)\Big)$$

i-te Komponente

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

analog Taylorreihe (1. Ordng $\neq 0$)

$$= \frac{1}{\cancel{V}}\, \varepsilon_{ijk}\, \cancel{dA_j\, dx_j}\, \partial_j V_k$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial_j V_k = (\vec{\nabla} \times \vec{V})_i$$

$\uparrow$ Nabla

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{V} = \sum_{ijk} \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j V_k = \vec{\nabla} \times \vec{V}}$$

Wirbeldichte ist durch Kreuzprodukt von Nabla u. $\vec{V}$ bestimmt.

2.3. Zwei wichtige Vektoridentitäten

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f(\vec{r})\right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{r})\right) = 0$$

2.4. Helmholtztheorem

man kann ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r})$ in 2 Anteile zerlegen (eindeutig)

$$\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_t$$

l : longitudinaler Anteil

t : transversaler Anteil

$$\vec{V}_e = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wenn man die Quelldichte kennt $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$
kann man $\vec{V}_e$ berechnen

$$\vec{V}_t = \vec{\nabla}_r \times \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wenn man die Wirbeldichte kennt $(\vec{\nabla} \times \vec{V})$
so kann $\vec{V}_t$ berechnet werden

Das Feld ist durch Kenntnis von Wirbeln und Quellen komplett bestimmt.

plausibel machen (eigentlich ÜA)

wähle Fourierdarstellung d. Feld $V(\vec{r}) \xrightarrow{FT} V(\vec{q})$

anwenden: $\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{V}(q) = (-q^2 + \vec{q}\,\vec{q}\cdot)\, \vec{V}(q)$

$$\leadsto \vec{V}(q) = -\frac{\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{V}(q)}{q^2} + \frac{\vec{q}\,\vec{q} \cdot \vec{V}(q)}{q^2}$$

Rücktrafo in Ortsraum:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{Faltung von } FT(q^{-2}) \circledast \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times v(\vec{r})$$

$$\partial_t f(t) \longrightarrow i\omega f(\omega)$$

$$\partial_x f(x) \longrightarrow iq f(q)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) \longrightarrow i\vec{q} \times \vec{f}(q)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4\pi r}$$

longitudinal / transversal :

<u>Vektorfeld in FR</u> $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0 \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$

$$\boxed{\vec{v}_l = \frac{\vec{q}\cdot\vec{v}_0}{q^2}\vec{q} \qquad \vec{v}_t = \frac{\vec{q}\times\vec{q}\times\vec{v}_0}{q^2}}$$