

VL Elektrodynamik

Andreas Kuorr

EW 742

13-14 Die

Inhalt der VL

- Historisches
- Begriffe d. Feldtheorie
- Maxwellgleichungen (Ableitg. aus QM)
- grundlegende Strukturen, Erhaltungssätze
- formale Lösungen, Materie als Quelle

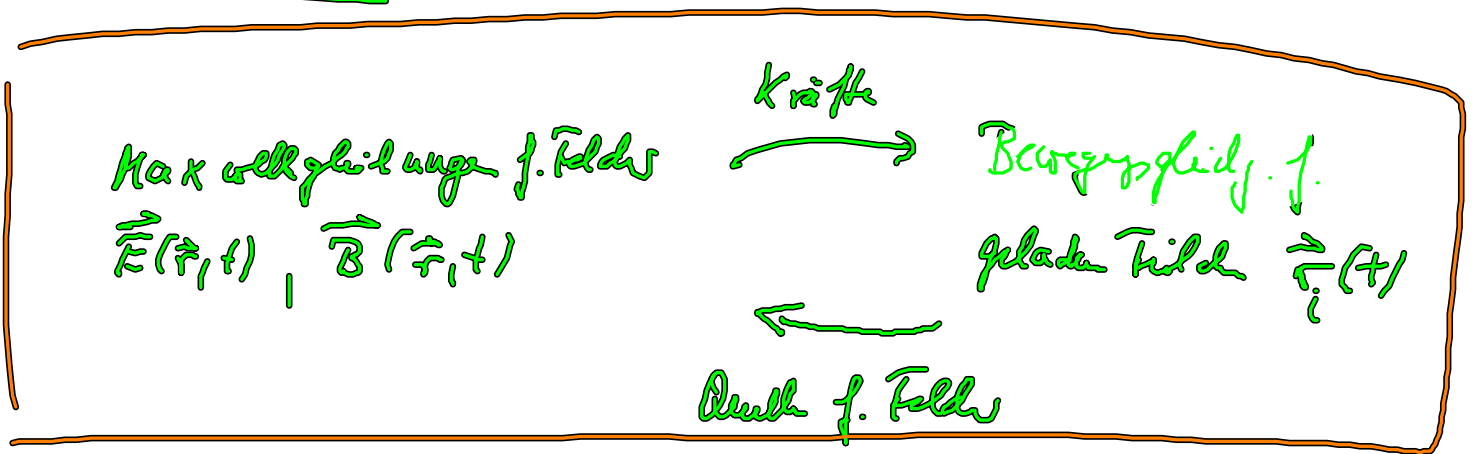
- Felder v. bewegte Punktladungen
- einfach Materialmodell
- Wellenlösungen in Materie / Vakuum
- Quellen v. em. Feldern (Strahlung)
- Optik: Brechung, Reflexion, Beugung
- Führung u. Speicherung v. em. Energie
- relativistische Effekte, Formulierung.
- Quantisierung der Elek-Licht WW
- Laser, nichtlineare Optik

1) Historische Beweise

- C. A. Coulomb (1736 - 1806) Kraftgesetz
- J. P. Biot (1774 - 1862)
S. Savart (1791 - 1841) Magnetfelder an Leitern
- M. Faraday (1791 - 1867) Induktionsgesetz
- J. C. Maxwell (1831 - 1879) einheitl. Theorie
- H. A. Lorentz (1853 - 1928) Kraft auf geladene Teilchen

- H. Herz (1857-1894) elmag. Wellen
- W. Heisenberg u.a. (1901-1976) Quantifiz. d. Ladephysik
- P. Dirac (1902-1984) Quantifiz. el. mag. Feld
- N. Basov, C. Schawlow, Townes Laser
- Manipulation einzelner Photonen
J. Kimble, A. Zeilinger, u.a.

Grundprobleme:

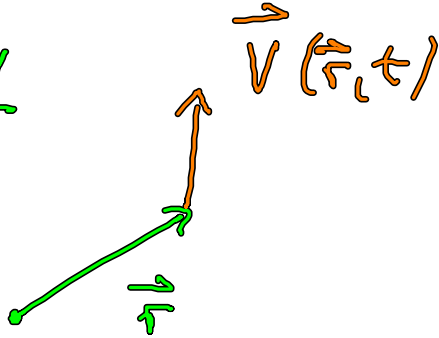


Selbstkonsistent z. Problem

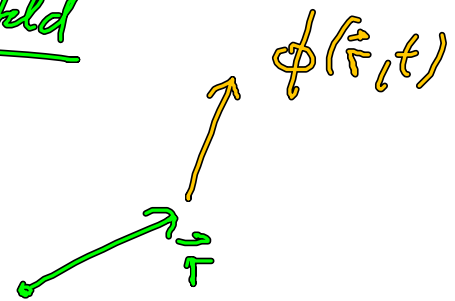
2. Begriffe d. Feldtheorie

2.1. Vektorfelder haben Charakter

Vektorfeld





Skalarfeld



Verwendg. v. Nablaoperationen zur Charakterisierung

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$$

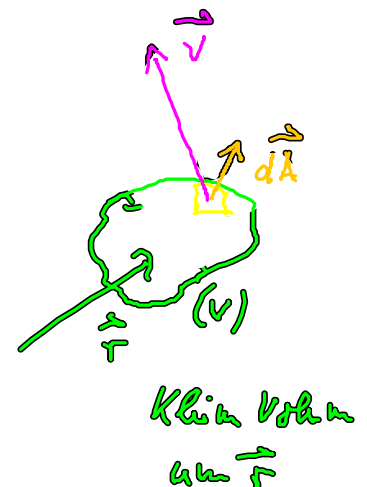
<u>2 Größen</u> :	$\text{div } \vec{v}(\vec{r}, t)$	Quelldichte	
	$\text{rot } \vec{v}(\vec{r}, t)$	Wirbelndichte	

2.2. Quell- und Wirbelndichte

2.2.1 Quellndichte eines Vektorfeldes

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}, t) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\vec{A}' \cdot \vec{v}(\vec{r}')$$

abzähl d. Flusses

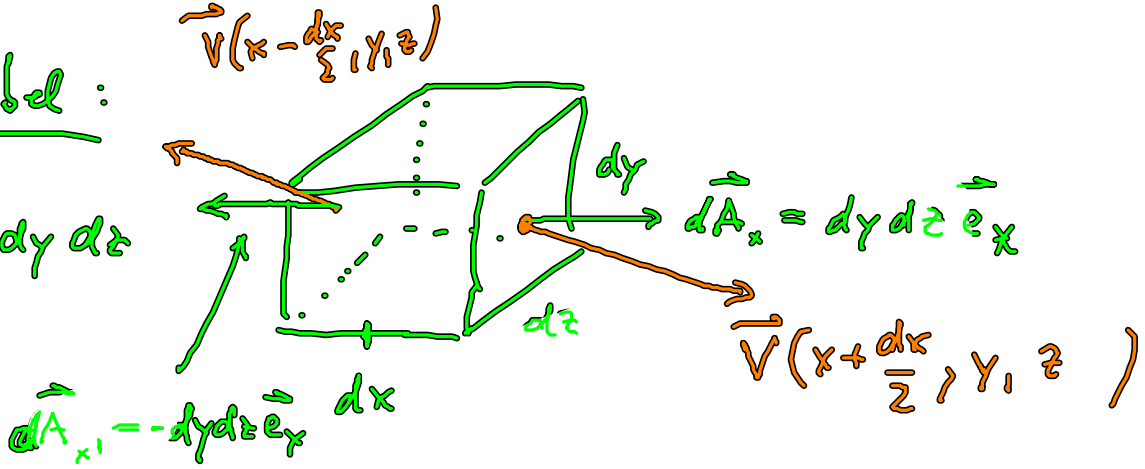


Behauptg.:

$$\text{div } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

Plausibel:

$$V = dx dy dz$$



$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{dx dy dz} \left(\begin{array}{l} \text{links:} \\ -V_x(x - \frac{dx}{2}, y, z) dy dz + V_x(x + \frac{dx}{2}, y, z) dy dz \\ \text{rechts} \\ -V_y(x, y - \frac{dy}{2}, z) dx dz + V_y(x, y + \frac{dy}{2}, z) dx dz \\ -V_z \\ \end{array} \right)$$

Taylorreihe:

$$\left(-V_x(x, y, z) + V_x(x, y, z) + \partial_x V_x(x, y, z) \frac{dx}{2} + \partial_x V_x(x, y, z) \frac{dx}{2} \right) dy dz$$

$$\partial_x V_x \quad \underline{\underline{dy dz dx}}$$

$$\text{div } \vec{V} = \partial_x V_x + \partial_y V_y + \partial_z V_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Über den das Produkt $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ bekannt.

Bsp: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, Kugelsymmetrie $|\vec{r}| \equiv r$

dh: $\vec{E} = f(r) \vec{e}_r$ kann man $f(r)$ berechnen

$$\vec{e}_r = \cos\varphi \sin\vartheta \vec{e}_x + \sin\varphi \sin\vartheta \vec{e}_y + \cos\vartheta \vec{e}_z$$

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\vec{e}_r \partial_r + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \partial_\vartheta + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi) \cdot (f(r) \vec{e}_r)$$

$$= \partial_r f(r) + \frac{f(r)}{r} \vec{e}_\vartheta \cdot \partial_\vartheta \vec{e}_r + \frac{f(r)}{r \sin\vartheta} \vec{e}_\varphi \cdot \partial_\varphi \vec{e}_r$$

$$\partial_\vartheta \vec{e}_r = \vec{e}_\vartheta$$

$$\partial_\varphi \vec{e}_r = \sin\vartheta \vec{e}_\varphi$$

$$\Downarrow 0 = \frac{2 f(r)}{r} + \partial_r f(r)$$

$$f(r) = \frac{c}{r^2} \text{ - Konstante}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{c}{r^2} \vec{e}_r$$

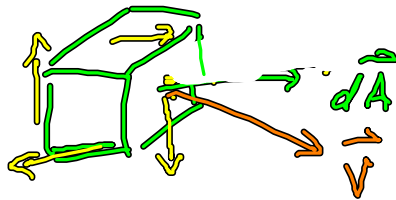
2.2.2. Rotation / Wirbel durch ein Vektorfeld

$$\text{Def: } \text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{(V)} d\vec{A}' \times \vec{v}(\vec{r}')$$

Behauptg: $\text{rot } \vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})$

planckel:

$$V = dx dy dz$$



$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{v})_i &= \frac{1}{V} \left(-\varepsilon_{ijk} dA_j v_k \left(\vec{r} - \frac{dx_j}{2} \vec{e}_j \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{ijk} dA_j v_k \left(\vec{r} + \frac{dx_j}{2} \vec{e}_j \right) \right) / \end{aligned}$$

\uparrow
i-k Komponente

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

analyt. Taylorreihe (1. Ordnung $\neq 0$)

$$= \frac{1}{V} \varepsilon_{ijk} dA_j dx_j \partial_j v_k$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = (\vec{\nabla} \times \vec{v})_i$$

↑
Nabla

$$\boxed{\text{rot } \vec{v} = \sum_{ijk} \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j v_k = \vec{\nabla} \times \vec{v}}$$

Wird dies ist das Kreuzprodukt von Nabla u. \vec{v} bekannt.

2.3. Zwei wichtige Vektoridentitäten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f(\vec{r})) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}(\vec{r})) = 0$$

2.4. Helmholtzfluore

man kann ein beliebiges Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ in 2 Anteile zerlegen (schiebig)

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_t$$

e : longitudinaler Anteil

t : transversaler Anteil

$$\vec{V}_e = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \cdot \vec{V}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wenn man die Quellsdichte kennt ($\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$)
kann man \vec{V}_e berechnen

$$\vec{V}_t = \vec{\nabla}_r \times \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}_{r'} \times \vec{V}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

wenn man die Wirbelsdichte kennt ($\vec{\nabla} \times \vec{v}$)
so kann \vec{V}_t berechnet werden

Das Feld ist durch den transversalen Anteil
und die Quellsdichte komplett bestimmt.

planstellen machen (eigentlich \hat{u}_k)

wähle Fourierdarstellung d. Feld $V(\vec{r}) \xrightarrow{FT} V(\vec{q})$

$$\text{ausw. : } \vec{q} \times \vec{q} \times \vec{V}(\vec{q}) = (-q^2 + \vec{q} \cdot \vec{q}) \vec{V}(\vec{q})$$

$$\Downarrow \vec{V}(\vec{q}) = -\frac{\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{V}(\vec{q})}{q^2} + \frac{\vec{q} \cdot \vec{q} \cdot \vec{V}(\vec{q})}{q^2}$$

Rückhinein in Ortsraum:

$\vec{V}(\vec{r}) = \text{Feld aus FT } (q^2) \otimes \vec{D} \times \vec{D} \times V(\vec{r})$

$$\partial_t f(t) \rightarrow i\omega f(\omega)$$

$$\partial_x f(x) \rightarrow iq f(q)$$

$$\vec{\nabla} \times f(\vec{r}) \rightarrow i\vec{q} \times f(\vec{q})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4\pi r}$$

logitikal / bar overel :

Vekfeld in FR $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}_0 e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$

$$\vec{V}_e = \frac{\vec{q} \cdot \vec{V}_0}{q^2} \vec{q}$$

$$\vec{V}_s = \frac{\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{V}_0}{q^2}$$