3. Maxwellgleichungen – eine Ableitung über Eichfelder

Maxwellgleichungen als zentrale Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Felds

Ableitung über Lagrangegleichungen f. Felder

3.1. Lagrangegleichungen f. Felder

3.1.1. Erinnerung an Teilchen

Teilchen: Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i)$

Lagrangegleichungen: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

$\rightarrow$ Teilchenbahn damit bestimmt $\ddot{q}_i = f(q_i)$

Impulsdefinition: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow [q_i, p_i] \neq 0$ in der QM

3.12. Wirkprinzip f. Felder

Analogie $\underbrace{S = \int dt\, L(q_i, \dot{q}_i)}_{\text{Teilchen}}$ (S Wirkg.)

f. Felder betrachten: Υ_i : Felder, Feldkomponenten $i = x, y, z$

$$S = \int dt\, L\left(\Upsilon_i, \partial_t \Upsilon_i, \partial_{x_j} \Upsilon_i\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Upsilon_i(\vec{r}, t) \\ q_i(t) \end{array}\right\}$$ Verallg. d. Lagrangefkt. f. Felder, $\boxed{t \to \vec{r}, t}$ $\qquad \partial_{x_j} \to \partial_j$

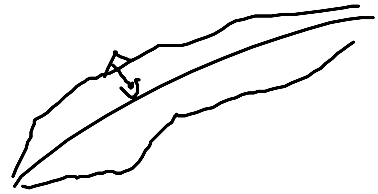
$$S = \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}\left(\Upsilon_i, \partial_t \Upsilon_i, \partial_j \Upsilon_i\right)$$

Einführg. des Orts analog z. Zeit in die Theorie weil $\Upsilon(t, \vec{r})$: $\mathcal{L} \mathrel{\hat{=}}$ Lagrangedichte

in Analogie zur Mechanik $\boxed{\delta S = 0}$

Wirkg auch für Felder extremal!

3.1.3. Lagrange Feldgleichungen



$$S = \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}\left(\psi_i^0 + \delta\psi_i,\ \partial_t \psi_i^0 + \partial_t \delta\psi_i,\ \partial_j \psi_i^0 + \partial_j \delta\psi_i\right)$$

$\psi_i^0 \hat{=}$ reales Feld, $\delta\psi_i \hat{=}$ Variation, jetzt Taylorreihe

$$S = S_0 + \underline{\underline{\int dt}}\,\underline{\underline{\int d^3r}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i^0}\delta\psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_i^0)}\partial_t \delta\psi_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_i^0)}\partial_j \delta\psi_i \right)$$

$j = x, y, z$

$$S_0 = \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}\left(\psi_i^0, \partial_t \psi_i^0, \partial_j \psi_i^0\right)$$

$S - S_0 = \delta S \overset{!}{=} 0 = \int (\dots\, \delta\psi_i)$

bei der partiellen Integration entsteht ein „Minus"

Randterme verschwinden

durch lineare Unabhängigkeit der ψ_i, $\psi_i^0 \to \psi_i$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underbrace{\psi_{i/t}}_{\partial_t \psi_i}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underbrace{\psi_{i/j}}_{\partial_j \psi_i}}}$$

Lagrange Feldgleichungen

3.1.4. Rätselraten um die Lagrangedichte

$\mathcal{L}$ unklar, L war $T-U$ in Mechanik

„you have to fiddle around" $\hat{=}$ raten + basteln

Feynman

<u>Idee</u>: man bastelt das $\mathcal{L}$ so, daß die richtige Gleichung herauskommen

<u>Bsp</u>: keine Schrödingergleichung ψ, ψ^*

Potential

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \underline{\underline{\left(\partial_i \psi^* \partial_i \psi\right)}} - U\psi^*\psi$$

$\psi(\vec{r},t), \; \psi^*(\vec{r},t)$

Beweis, daß dies Schrödingergl. gibt: $\psi_1 = \psi^*, \; \psi_2 = \psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{i\hbar}{2}\partial_t \psi - U\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\psi$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,j}}}} = \frac{\partial}{\partial \psi^*_{,j}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi\right)$$

$$\delta_{ij}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_j \psi$$

$$\rightarrow \quad i\hbar \partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + u\right)\psi \qquad \checkmark$$

3.2. Das elektromagnetische Feld als Eichfeld

Erinnerung: $\psi \rightarrow \psi e^{i\chi'}$

Transformation ändert nicht die Physik

$\chi' =$ konstante

Ladung

was passiert $\chi' = \chi'(\vec{r},t)$? , wähle: $\chi' = \frac{q}{\hbar}\chi$

$$i\hbar\partial_t\left(\psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}\right) = \left(\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2 + u\right)\psi e^{\frac{iq}{\hbar}\chi}$$

$\chi(\vec{r},t)$!

Durchführen:

$$i\hbar\,\partial_t\,\psi(\vec r,t) = \left\{ \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec\nabla + \underline{\underline{q\vec\nabla\chi}}\right)^2 + U + \underline{\underline{q\,\partial_t\chi}} \right\}\psi(\vec r,t)$$

$$U,\ \chi = f(\vec r,t)$$

$\longrightarrow$ Physik ändert sich!

um das zu retten führen wir 2 neue Felder in der Theorie ein:

$\vec A$: Vektorpotential

ϕ : skalares Potential

<u>Forder:</u> $\psi \to \psi\, e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$

$A \longrightarrow A + \vec\nabla\chi$

$\phi \to \phi - \partial_t\chi$

<u>Eichtransformation</u> $\forall$ Felder

Die Schrödingergl. bleibt invariant, wenn man $\vec A, \phi$ als <u>neue</u> physikal. Realität in Schrödingergl. berücksichtigt.

Schrödingergl. mit $\vec{A}, \phi$ =

Schrödingergl. geladen Teilch in elektromagn. Feld

$$i\hbar \partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \underline{\underline{q \vec{A}}} \right)^2 + U + \underline{\underline{q \phi}} \right) \psi$$

wenn Trafo ausgeführt wird und

alle Felder transformiert werden

bleibt die Schrödingergl. invariant.

3.3. Freies Maxwellfeld

Ziel: Herleitung der Feldgleichungen (Maxwellgleichungen) für $\vec{A}$ und ϕ.

$\mathcal{L}$ f. Schrödingergl. ist f. WW zwischen $\vec{A}, \phi, \psi$.

freies Feld $\vec{A}, \phi$ hat zusätzlich $\underline{\underline{\mathcal{L}_F}}$ ohne ψ

Bedingungen:

- zu konstruierende Felder sollen unabhängig v. χ sein

Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ wählen aus $\underline{\underline{\phi, \vec{A}}}$

$$E_x \sim \partial_x \phi + \partial_t A_x$$

oder $$B_x \sim \partial_y A_z - \partial_z A_y$$

ist sinnvoller Ausdr. v. Größen die in der Theorie auftauchen sollten

– quadratische Form in den Variablen

$$\mathcal{L}_F \left(\vec{E}, \vec{B} + \text{quadratisch} \right)$$

$$\boxed{\longrightarrow \quad \mathcal{L}_F = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_i \left(\partial_i \phi + \partial_t A_i \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_k \left(\sum_{ij} \varepsilon_{kij} \, \partial_i A_j \right)^2}$$

Lagrangedichte d. freien Maxwellfelds

3.4. Ableitung der gekoppelten Feld-Materie gleichungen

Zusammenfassg. aller $\mathcal{L}$'s:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$ freies Schrödingerfeld "$\partial_t \psi$"

$$- q \phi \psi^* \psi$$ ← potentielle Energie v. ψ in ϕ

$$+ \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\vec{A}\right)\psi^* \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi$$

↑ weil *

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{1}{2}\sum_i \Big(\varepsilon_0 \left(A_{i,t}^2 + \phi_{,i}^2 + 2\phi_{,i} A_{i,t}\right) \\ \qquad - \mu_0^{-1} \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i^2 \Big) \end{array}\right\} \mathcal{L}_F$$

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \rightarrow \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)$$

mit Hilfe der Lagrangefeldgleichgn. erhalten jetzt die gekoppelten Feld-Materie gleichungen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{,j}}$$

3 Felder Ψ: Ψ^* → Schrödingergl.

A_x, A_y, A_t → Wellengleichg. f. Vektorpotential

ϕ → – " – f. skalar Potential / Poissongl.

a) Auswertg. f. skalar Potential ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_t \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}}}_{} + \sum_j \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,j}}$$

$$-q\,|\Psi|^2 = 0 + \varepsilon_0 \sum_j \partial_j \underbrace{(\partial_j \phi + A_{j,t})}_{}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}}$$

$$\underbrace{q\,|\Psi|^2}_{\text{Ladungsdichte } \rho} = \varepsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\text{Quelldichte}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Quellgleichg. d. elektrischen Felds

oder im Potential:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\partial_t\vec{A}}$$

b) Auswertg. f. Vektorpotential

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_x} = \dots$$

Wirbelgleichg. d. magnet. Felds

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}}$$

und $\vec{j} = \frac{q}{2m}\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi + \text{k.c.}$

oder im Potential:

$$\boxed{-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\partial_t\phi}$$

Es existieren noch $\underline{\underline{2}}$ weitere Maxwellgl.:

(i) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Big| \, \vec{\nabla} \cdot$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Quellengleichg. d. magn. Felds

(ii) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Big| \, \partial_t$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(-\vec{E} - \vec{\nabla} \phi \right) = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

Wirbelgl. d. elektrischen Felds.