

3.5. Die Maxwellgleichungen: Zusammenfassung

$\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ werden durch Maxwellgl. und die zugehörige Quelle bestimmt:

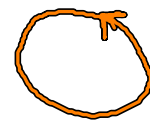
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die Quaddichte v. \vec{E} ist durch die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ bestimmt



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

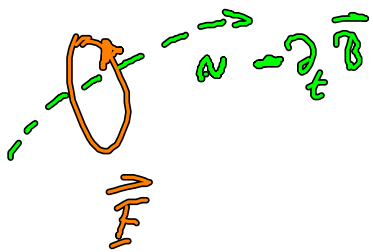
Die Quaddichte v. \vec{E} ist Null



geschlossener Feldlinien

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

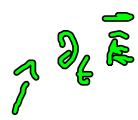
Die Wirbeldichte von \vec{E} wird durch zeitliche Veränderung v. \vec{B} bestimmt.



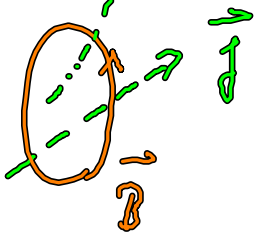
Rechtszickel $\hat{=}$ Linksregel

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$c^2 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$



Die Wirbeldichte d. Magnetfelds ist durch Stromdichte \vec{j} und zeitlich Änderung d. \vec{E} -Felds gegeben.



- 1820 ~ Oerstedt : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \mu_0$
- 1830 ~ Faraday : auch (Kontinuität) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$
- 1876 ~ Maxwell : Ergänzung $\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

"Wellen"

⇒ Licht ist Teil einer elektromagn. Welle

"Quellen" d. Felder : Ladungsdichte $\rho = q |\Psi|^2$

$\Psi(\vec{r}, t)$ Schwingungswert fkt.

klass. Ladungsdichte: $\rho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$

↑
Ladung q_i
 $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \hat{=} \text{Bahnkurve}$

↑
am Ort \vec{r}_i befindet
sich die Ladg. q_i

Stromdichte: $\vec{j} = \frac{q}{2m} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right) \Psi + \text{h.a.}$

klass. ist. Standardform : $\vec{f} = \sum_i q_i \vec{r}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$

mit Bezugspkt. f. \vec{f} , also $\varphi(\vec{r}_i, t)$ oder $\vec{r}_i(t)$

ist das ein selbst-konsistentes System

$$\text{ist } \partial_t \varphi = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q \vec{A} \right)^2 + q \varphi \right) \varphi$$

oder class. : $\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i(t) \right) = q_i \left(\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t) \right)$

Lorentzkraft aus Maxwellschen Gleichung

- alternativ kann man auch die Potentiale φ, \vec{A} lösen
 stellt die Maxwellgl. f. \vec{E}, \vec{B} .

Aber: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \partial_t \vec{A}$$

am Ende bestimmen wir die relevanten Größen zu finden.

3.6. Klassifizierung

3 Mgl. der Behandlung:

Materie + Felder (\vec{E}, \vec{B}) klassisch \Rightarrow klassische ED

Materie quantisiert (F) + Felder (\vec{E}, \vec{B}) klassisch \Rightarrow „halbklassisch“
„Semi-klassisch“

- 4 - + Felder (\vec{E}, \vec{B}) quantisiert \Rightarrow vollquantisierte Theorie

3.7. Bilanzien

3.7.1. Ladungsbilanz (Kontinuitätsgleichung)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

Quelle und Senke d. Stromdichte
an Ort \vec{r} wird durch Änderung (t)
der Ladungsdichte erzeugt.

klassischer Beweis:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(\vec{r}, t) &= \partial_t \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ &= \partial_t \sum_i q_i \delta(x - x_i(t)) \delta(y - y_i(t)) \delta(z - z_i(t)) \\ &= \sum_i q_i \left(\underbrace{\partial_x \delta(x - x_i(t))}_{\text{}} \cdot (-\dot{x}_i(t)) \cdot \delta(y - y_i(t)) \delta(z - z_i(t)) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x - x_i(t)) \underbrace{\partial_y \delta(y - y_i(t))}_{\text{}} \cdot (-\dot{y}_i(t)) \delta(z - z_i(t)) \right. \\ &\quad \left. + \delta(x - x_i(t)) \delta(y - y_i(t)) \underbrace{\partial_z \delta(z - z_i(t))}_{\text{}} \cdot (-\dot{z}_i(t)) \right) \end{aligned}$$

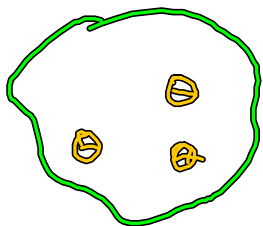
$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad \hat{=} \quad \text{Kette}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i q_i \left(-\vec{\nabla}_r \cdot \dot{\vec{r}}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \right) \\
 &= -\vec{\nabla}_r \cdot \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \\
 &= -\vec{\nabla}_r \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Teilproblem: Abfließend Ladungen $\rho(\vec{r}, t) \neq 0$
 erzeugen Ströme mit Feldlinien an Ort \vec{r}

Integrieren über V mit Oberfläche (ν)

Satz v. \oint - ρ :
$$\int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = - \int_V dV \partial_t \rho(\vec{r}, t)$$



V mit (ν)

$$\oint_{(\nu)} d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\partial_t \int_V dV \rho(\vec{r}, t)$$

$I(t)$ $Q(t)$ Strom durch die
Oberfläche (V)Gesamtladg. im
Volumen V

$$\frac{d}{dt} Q(t) = -I(t)$$

Änderung d. Gesamtladg im Volumen V
ist gleich d. Strom durch (V).

3.7.2. Poyntingtheorem (Poyntingtheorem)

$$\vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \right) \quad \vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} \right)$$

Lagrange multipliziert: Energiedichte $\sim E^2, B^2$

multipliziert, addiert

$$-\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \partial_t \left(\vec{B}^2 + \frac{1}{c^2} \vec{E}^2 \right) + \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j}$$

NR: $\partial_t (\vec{B} \cdot \vec{B}) = \dot{\vec{B}} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} = 2 \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}}$

$$\Downarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t} = \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}} \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

durch μ_0 teilen

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 + \epsilon_0 \vec{E}^2 \right) + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Poynting Theorem:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{em}(\vec{r}, t) + \nabla \cdot \vec{S}(\vec{r}, t) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$w_{em} = \text{elektromagnet. EDichte} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2$$

$$\vec{S} = \text{Poynting Vektor} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \text{Verlustleistungsdichte}$$

Zusammenfassung:

$$\sim \text{Analogie Kontinuitätsgleichung} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

\Downarrow \vec{S} ist die Energiestromdichte,

w_{em} ist die Energiedichte

- $\vec{j} \cdot \vec{E}$ Ker Analogon zu $\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

aber Interpretation analog zu $\vec{v} \cdot \vec{f}$ Leistung in Mechanik

$\vec{j} \cdot \vec{E} \hat{=}$ Leistungsdichte

„Verlust Leistungsdichte“

↳ beschleunigte LT
Antrieb der Feld
Energie

↑ Kraft

Ungleichung hier ist
 \vec{E}, \vec{D} ist weil
 \vec{D} -Feld Kern
Arbeit vermittelt!

- Plausibilität!

$$\text{Arbeit: } A = \int dV \int dt \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

↑
↑
↑
 Dichte Übergang u. Leistung → Arbeit

$$\vec{j}_{\text{Kugelza}} = \int dV \int dt \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$= \int dt \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i(t) \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t)$$

ru ru

$$= \sum_i q_i \int dt \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} \cdot \vec{E}(\vec{r}_i, t)$$

$$= \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_i, t)}_{\text{Anteil d. f. } \vec{E}} q_i$$

Anteil d. f. \vec{E}

Arbeitsschritt d. Reduktion

3.8. Es wird Lind: Wellengleichung

Wellengleichung:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{B}}_{\dots} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad | \partial_t$$

$$-\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad | \vec{\nabla} \times$$

also

$$+ \quad 0 = \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E})} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} + \mu_0 \partial_t \vec{j}$$

$$\underbrace{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}}_{\dots} = \mu_0 \partial_t \vec{j} + \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\rho}$$

Wellenoperator

ϵ_0

$$\square \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} + \vec{\nabla} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$$

hsg. erlaubt
Wellen

Quell der Wellen

3.9. Weitere Vergleiche

a) Felder im Vakuum $\vec{j} = 0 = \rho$

$\square \vec{E} = 0$, analog $\square \vec{B} = 0$ „homogen Wellengl.“

b) Felder mit \vec{j}, ρ „inhomogen Wellengl.“

c) zeitunabhängige Lösung \rightarrow Elektrostatik, Magnetostatik

d) Maxwellgl. in Medien (Optik),

e) Erzeug. v. Wellen

f) Quantentheorie d. Maxwellgl. + Antennalösung
(Laser)