4. Wellen im Vakuum

4.1. Wellengleichung im Vakuum

Maxwell: $\rho = 0 = \vec{j}$

$$(1)\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$(1)\quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \equiv \vec{\nabla}\,\vec{\nabla} \cdot - \Delta$$ (allg. Vektoridentität f. Vektor)

$$\Rightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) \vec{E} = 0$$ gilt für jede Komponente $E_{i=x,y,z}$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E_i(\vec{r},t) = 0}$$

Wellengleichung im Vakuum f. $\vec{E}$-Feld

$\vec{B}$-Feld erfüllt eine analoge Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ partielle, zugleich aber linear, homogene Dgl.

- im Vergleich gewöhnliche Dgl: n-ter Ordnung

  → n parameterige Lösungsschar

  (Fundamentalsystem: n-Funktionen, n-Konstanten)

- Lösung einer partiellen Dgl:

  n - Ordnung der Dgl. (höchste Ableitg.), Wellengl. $n = 2$

  p - Anzahl der unabhängigen Variablen, -"- $p = 4$

  x, y, z, t

Aussage: Lsg. beinhaltet n unbestimmten Funktionen mit p-1 Variablen

Bsp: 1-dimensionale Wellengleichung

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)}_{n=2} E_y \underbrace{(x, t)}_{p=2} = 0$$

→ es gibt 2 unbestimmte Funktionen
mit je $p-1 = 1$ Variablen

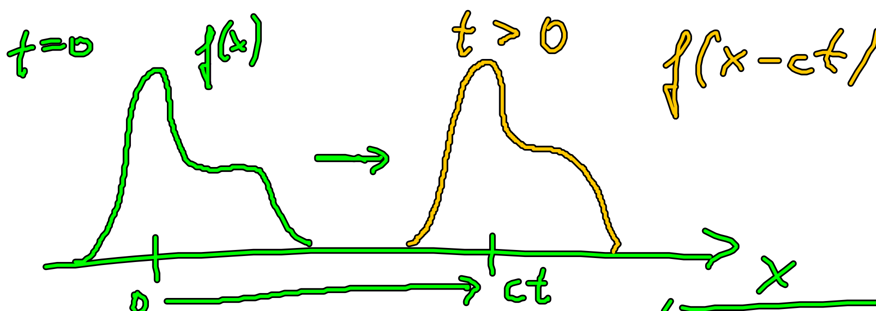
die Funktion sind: $f(x-ct)$
$g(x+ct)$

Beweis d. Einsetzen:

$\partial_x^2 E \to f''$, $\partial_t^2 E \to f''(-c)^2$

erfüllt die Wellengleichung !

f, g Funktion d. Anfangs und Randbedingg. festlegen ⇒ bestimmt die Lösung



forminvariante Ausbreitung ; $\boxed{\text{sich in Raum/Zeit fortpflanzendes Signal nennt man Welle}}$

$g(x)$ breitet sich nach links aus

4.2. Ebene Welle als Fundamentallösung

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})\,t\right)} \right\}_{\forall \vec{k}}$$

ist ein vollständiges System,

$\omega = \omega(\vec{k})$ heißt Dispersionsrelation

ω und $\vec{k}$ sind nicht unabhängig

Einsetzen der Welle: $\underbrace{\Delta E_i}_{} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 E_i}_{} = 0$

$$E_k\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \;\Big|\; \left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\right) E_k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} - \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 E_k\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} = 0$$

$$\underbrace{\left(-\vec{k}^2 + \frac{1}{c^2}\,\omega^2\right)}_{=0} E_k\, e^{i\cdots} = 0$$

Dispersionsrelation $\boxed{\omega = c|k|}$ v. em. Welle im <u>Vakuum</u>

Jedes Feld ist darstellbar:

$$E_i(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} E_{i\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega(k)t}$$

analog zu Schrödinger gl.

Eigenschaft d. eben Welle:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega(k)t}$$

a) Orthogonalität der Vektorkoeffizienten: $\vec{E}_k, \vec{B}_k, \vec{k}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$, Ansatz einsetzen oder FT

$$i\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = i\omega \vec{B}_{\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \omega \vec{B}_{\vec{k}}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$i\vec{k} \times \vec{B}_k = -i\omega/c^2\, \vec{E}_k$$

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{B}_k = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_k}$$

$\Rightarrow$ $\vec{k}, \vec{E}_k$ und $\vec{B}_k$ bilden ein orthogonalen Satz v. Vektoren

b) Bedeutg. v. Phasenfront

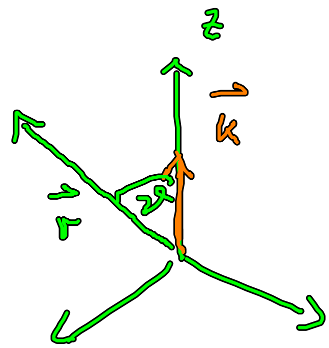
$$E_i = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{E_{ik}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}}_{\text{ebene Welle}}\Big) = E_{ik} \cos(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t}_{\text{Phase der eben Welle}})$$

Realteil
Messgröße

Wann ist die Phase konstant?

$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \underbrace{\omega t}_{\text{feste Zeit} \,\hat{=}\, \text{Blitzlichtaufnahme}} = \text{konst}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{konst}}_{\text{Definiert eine Ebene}} \qquad \vec{k} = \text{konst}$$



$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k\, r \cos\vartheta$$
$$= k\, z = \text{konst}$$

$\longrightarrow$ z konst $\longrightarrow$ alle Punkte in x, y Ebene

Die Flächen konstanter Phase bei einer ebenen Welle sind Ebenen

c) Polarisationseigenschaften ebener Wellen

- Richtg. d. $\vec{E}$ - Vektors $\hat{=}$ Polarisation

kann i.a. an jedem Ort, zu jeder Zeit verschieden sein, steht aber immer $\perp \vec{k}$

- kann man das systematisieren ?

- 1 festes $\vec{k}$, d.h. ebene Welle

$$\underline{\vec{E}(\vec{r},t)} = \underbrace{\vec{E}_{\vec{k}}}_{\perp \text{ zu } \vec{k}\text{, also in Ebene}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Komplexe Größe, später Realteil

$$= \underbrace{\left(E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2\right)}_{\text{wird in Ebene aufgespannt, Amplitude + Phase}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$= \left(|E_1| e^{i\phi_1} \vec{e}_1 + |E_2| e^{i\phi_2} \vec{e}_2\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

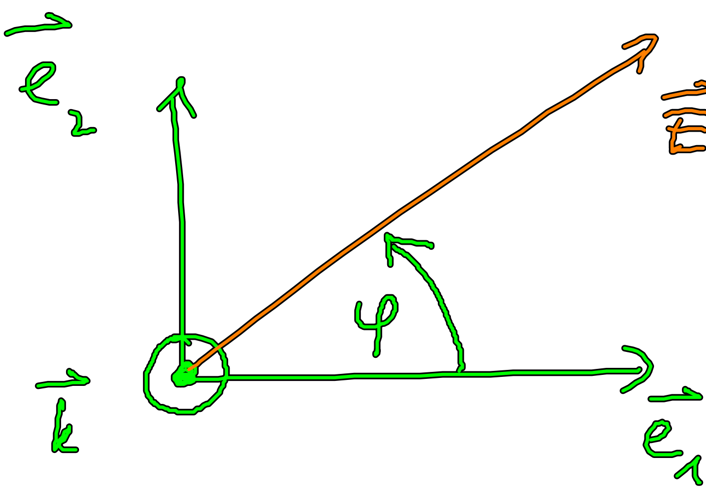
$$= \left(|E_1|\vec{e}_1 + |E_2|\vec{e}_2\, e^{\overbrace{i(\phi_2-\phi_1)}}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t + \phi_1}$$

$$\underbrace{}_{\Delta\phi}$$

unwichtig, kann immer wegtransformiert werd. d. Zeitachsen-verschiebung

$$\mathrm{Re}(\vec{E}) = |E_1|\vec{e}_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$+ |E_2|\vec{e}_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\phi)$$



$\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

bestimmt Lage d. $\vec{E}$-Feld Vektors

$$\varphi(\vec{r}, t) = \arctan\left(\frac{|E_2| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \Delta\phi)}{|E_1| \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right)$$

$|E_1|$, $|E_2|$, $\Delta\phi$ können in Exp. eingestellt werden

1. Fall: $\Delta\phi = 0$ wählen $\rightarrow$ $\varphi(\cancel{\vec r, t}) = \arctan\left(\frac{|E_2|}{|E_1|}\right) = \text{konst}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec E\text{-Feld zeigt immer in dieselbe feste Richtung} \\ \vec E \text{ heißt linear polarisiert, fest im Raum}\end{array}}$$

2. Fall: $\underbrace{\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}}_{\text{cos im Zähler wird z. sinus}}$, $|E_1| = |E_2|$

$\vec k$ legen wir in z-Achse

$$\varphi = \pm(\vec k\cdot\vec r - \omega t) = \pm(k_z\cdot z - \omega t)$$

1. für festes z: $\vec E$-Spitze bewegt sich auf einer Kreisbahn

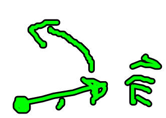
$$\varphi \sim \pm\omega t$$

2. f. feste t: (Blitzlicht)

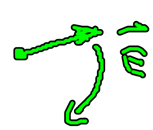
$$\varphi \sim \pm k_z z$$

$\vec E$-Spitze bewegt sich auf Spirale

$\rightarrow$ zirkular polarisiertes Licht



Vorzeichen $\nearrow$ + rechts zirkular polarisiert



Vorzeichen $\searrow$ − links zirkular polarisiert neue angepaßte Vektoren zum Aufspannen d. Lichtvektors:

$$\vec{E} = |E_1| \left(\vec{e}_1 + e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \vec{e}_2 \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$= |E_1| \underbrace{\underbrace{\left(\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2 \right)}_{\vec{e}_\pm}}_{\text{zirkulare Einheitsvektoren}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \left(E_+ \vec{e}_+ + E_- \vec{e}_- \right)$$

neue Basis

3. Fall: $\Delta\phi$ beliebig, E_1, E_2 beliebig

führt auf elliptische Kurve d. Spitze d. E-Felds

elliptische Polarisation

Zusammenfassg. der Wellen:

Darstellg d. E-Felds:

Amplitude d. eben Welle $\vec{k}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\left(\vec{e}_{\lambda(k)}\, E_{\vec{k}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega(k)t)} + c.c.\right)$$

Zerlegung nach eben Wellen

alle $\vec{k}$ sind i.a. nötig (Superposition)

Einheitsvekt. $\perp$ zu $\vec{k}$ die Ebene aufspannend (linear $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ zirk. $\sigma_+\ \sigma_-$.)

reell

<u>wählen</u>: $\vec{e}_{\lambda'(k)}\cdot\vec{e}^{\,*}_{\lambda(k)} = \delta_{\lambda\lambda'}$

identisch k

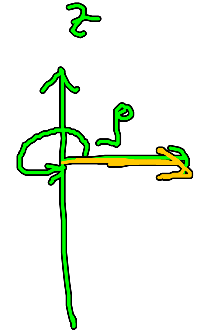
$\vec{k}\cdot\vec{e}_{\lambda(k)}$ stellt $\vec{D}\cdot\vec{E}=0$ sicher

<u>Info:</u> Exp. können <u>Stokes</u>parameter messen u. damit die Polarisation bestimmen

Es existieren weitere Wellentypen wie Kugel und Zylinderwellen,

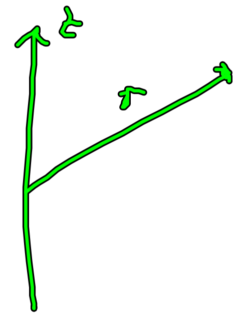
z. B Kugel und Zylinderwellen:

Zylinderwelle: f. große Entfernung v. Ursprung



$$E_{Zylinder} \sim \frac{e^{ik\rho - i\omega t}}{\sqrt{\rho}}$$

Kugelwelle:



$$E_{Kugel} \sim \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r}$$

$\boxed{\text{ÜA + Interesse}}$