5.5 Lösung der Potentialgleichungen

5.5.1. Formale Lösung d. Greenfunktion

Potentiale über Wellengleichung gegeben:

$\Psi \to \phi, A_x, A_y, A_z$

$$\Box \Psi(\vec{r},t) = \Delta \Psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Psi = -4\pi f(\vec{r},t)$$

wobei ϕ in Coulombeichung $c \to \infty$ erfordert zur Lösg der Poissongleichung

$f(\vec{r},t)$ kann entsprechend Strom- oder Ladungsdichte sein

Ziel ist die Lösung dieser Wellengleichung:

Hilfsmittel: Greenfunktion $G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},\vec{r}\,';t,t') = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')}$$

wirkt auf $\vec{r}$

Greensche Fkt beschreibt eine Welle
die durch kurzzeitiges Anschalten zur Zeit t'
eine Quelle am Ort $\vec{r}\,'$ erzeugt wird.

Wenn G bekannt, so ist:

$$\Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt' \underbrace{G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')}_{\text{muß zuvor ausgerechnet werden}} f(\vec{r}\,',t')$$

warum? Ψ erfüllt die Wellengleichung (Beweis)

$$\Box\, \Psi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt' \underbrace{\Box\, G(\vec{r},\vec{r}\,',t,t')}_{-4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\delta(t-t')} f(\vec{r}\,',t')$$

$\vec{r}$ $\quad t$

$$\Box\, \Psi(\vec r, t) = -4\pi\, f(\vec r, t) \quad \checkmark$$

wenn man G hat, dann hat man die volle Lösung $\Psi(\vec r, t)$

<u>Bemerkungen</u>:

a) zunächst kann $G(\vec r, \vec r\,', t, t')$ nur von $G(\underline{\vec r - \vec r\,'}, \underline{t - t'})$ abhängen, weil Quelle $\delta(t-t')\cdot\delta(\vec r - \vec r\,')$

man kann auch

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec r, t) = -4\pi\, \delta(\vec r)\, \delta(t) \quad \text{lösen}$$

b) finden später daß es 2 Lösungen gibt: $(\pm)$

$$G^{\mp}(\vec r - \vec r\,', t - t') = \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

nur G^+ erfüllt das Kausalitätsprinzip (später)

"G^+ : retardierte G-Funktion

G^- : avancierte – " – "

<u>5.5-2 Lösungen der Potentialgleichungen</u>

$\phi(\vec{r},t) \qquad \Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad$ (Lorenzeichg.)

$$\Big(-4\pi\, \underbrace{f(\vec{r},t)}_{\text{identifizieren}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Big)$$

$$\phi(\vec{r},t) = \int d^3r' \int dt' \, \underbrace{G^+(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t')}_{\frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right]\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}} \, \frac{\rho(\vec{r}\,',t')}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Lösg. f. skal. Pot. i. Lorenzeichg. gefunden

$c \to \infty$

$$\boxed{\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

skal. Potential in Coulombeichung

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}_{(T)}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

Vektorpotential in Coulomb (T) bzw. Lorenzeichg. $(\cancel{T})$

<u>Bemerkungen:</u>

a) $\rho, \vec{j}$ bestimmen $\vec{A}$ und ϕ durch Integration

Potentiale unterscheiden sich (!) in den verschiedenen Eichungen

Felder sind invariant!

b) man nennt die Potentiale mit der Variable

$$t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$$ die <u>retardierten</u> Potentiale

(„zeitverzögert")

Beobachtg. v. $\vec{A}(\vec{r},t)$ am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t

bei $\vec{r}$ und t erscheint ein Vorgang bei $\vec{r}\,'$ geschieht um

Laufzeit $\frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$ verzögert

c) im Gegensatz dazu

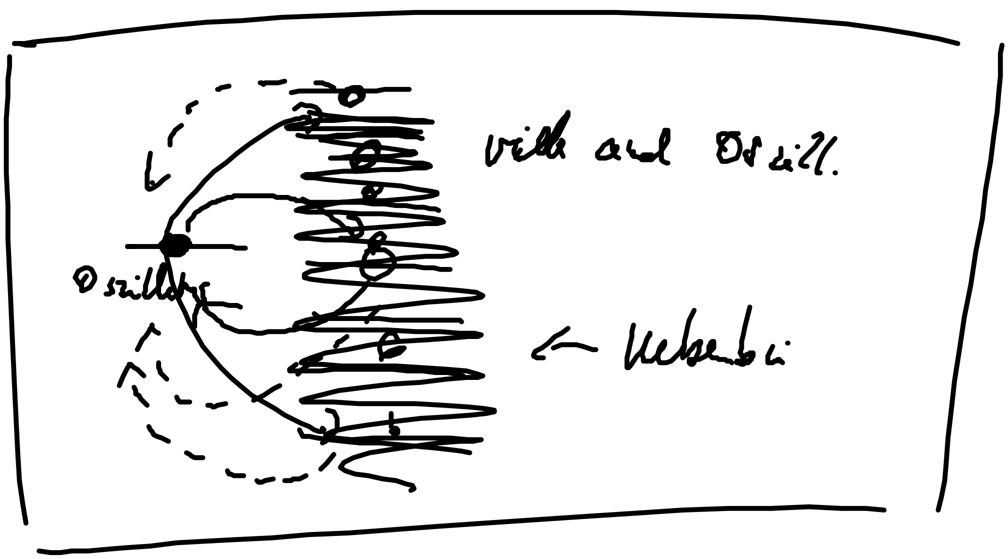
avancierte Lsg. hätte Variable $t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$

d.h. Wirkung kommt vor Ursache!

nichtkausale Lösung.

beide Lösungen $\exists$ mathematisch

nur die retardierte wird geglaubt.



5.5.3. Bedeutg. d. Greenfunktion

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\,\partial_t^2 \right) G(\vec r, t) = -4\pi\, \delta(\vec r)\, \delta(t) \qquad (*)$$

ist zu lösen

$$G(\vec r, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3q \int d\omega\; e^{i(\vec q\vec r - \omega t)}\; \underbrace{G(q, \omega)}_{\text{FT von } G(\vec r, t)}$$

hoch 4 wegen $4 \times$ FT

$$\delta(\vec r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q\; e^{i\vec q \cdot \vec r}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\; e^{-i\omega t}$$

Fouriertrafo der Wellengleichung f. G (*)

$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4} \left(-\vec q^{\,2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right)}_{\text{teilen}} G(\vec q, \omega) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\, 1$$

$$G(\vec q, \omega) = -\frac{4\pi}{\left(-q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)}$$

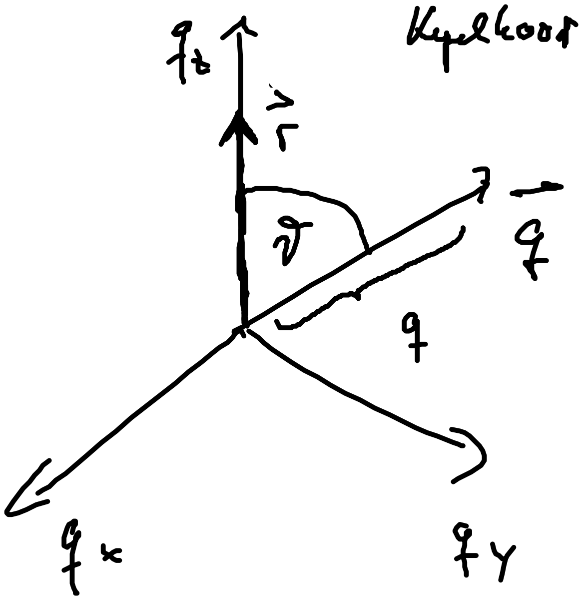
Lsg. im Fourierraum

$$G(\vec r,t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^3q \int d\omega\; e^{i(\vec q\cdot\vec r-\omega t)}\, \frac{1}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

fest in z-Richtg. gewählt

Integral

Kugelkoordinaten



$$G(\vec r,t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^{\infty} dq\, q^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{\dots} \frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$\dots \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, e^{iqr\cos\vartheta} = \frac{2}{qr}\sin(qr)$$

$(x = \cos\vartheta)$

$$= -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty} dq\, q\, \frac{\sin qr}{r}\; 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2}$$

$$= -\frac{c^2}{\pi^2 r}\int_0^\infty dq\, q \sin qr \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2}}_{-\frac{2\pi}{cq}\sin(cqt) \quad t>0}$$

$f(\omega)$

über Residuensatz:

analytische Fortsetzung d.

Funktion $f(\omega) \to f(z)$

$z \in \mathbb{C}$ komplexe Zahl

$$\boxed{\underbrace{t<0}_{\text{avancierte Fkt.}}}$$

$$G^+(\vec r, t) = \frac{2c}{\pi r}\underbrace{\int_0^\infty dq \, \sin(qr)\sin(cqt)}$$

$|\vec r - \vec r\,'|$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dq \,(e^{iqr} - e^{-iqr})\sin(cqt)$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dq \, e^{iqr}\sin cqt + \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^0 dq\, e^{iqr}\sin cqt$$

$$\boxed{q \to -q}$$

$$= \frac{1}{2i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dq \left(e^{iq(r+ct)} - e^{iq(r-ct)}\right)}\frac{1}{2i}$$

Def. ein δ-Fkt.

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\delta(r-ct) - \cancel{\delta(r+ct)}\right) \qquad \underline{t>0}$$

$$\longrightarrow G^{+}(\vec{r},t) = \frac{c}{r}\,\delta(r-ct)$$

$$\boxed{G^{+} = \frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}}$$

Damit ist die retardierte G-Fkt.

bewiesen!

$$G \to G(\vec{r}-\vec{r}\,',\ t-t') \qquad t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$

$$\longrightarrow \delta\left(t-t' - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right) \quad ✓$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|$$

$t' - t + \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{c}$

$t' - \left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$

5.6. Statischer Grenzfall d. E-Dynamik

alle Zeitableitungen $\partial_t \to 0$ oder $\underbrace{c \to \infty \text{ in Wellengleichung}}_{\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \to 0}$

statische Felder!

$\cancel{t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}}$

Elektrostatik

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Magnetostatik

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

man kann auch diese Potentiale direkt aus den Maxwellgl. bekommen.

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poissongl. d. Elektrostatik

mit der Lsg.

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times}_{\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot - \Delta}\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

Coulombeichg. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Poissongleichg. d. Magnetostatik