6. Feld-Dynamik ruhender u. bewegter Punktladungen

6.1. Potentiale und Felder

Punktladung mit Bahnkurve $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \,, \quad \vec{j} = q\,\dot{\vec{r}}_0(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

Strom und Ladungsdichte als vorgegeben annehmen

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3r'\;\rho(\vec{r}',t')\;\frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Greensche Funktion

Lorenzeichung

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3\vec{r}'\;\frac{q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

implizit in t' abhängig

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\;\frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}\right)}{}$$

$|\vec r - \vec r_0(t')|$

Eigenschaft der δ-Fkt:

$$\int dx\, g(x)\, \delta\big(f(x) - y\big)\, dx = \frac{g(x)}{\frac{df}{dx}}\Bigg|_{\substack{y=f(x)\\ \text{bzw. } x = f^{-1}(y)}}$$

Bestimmungsgl. f. x

$$x = t', \quad y = t$$

$$f(t') = t' + \frac{|\vec r - \vec r_0(t')|}{c}, \quad g(t') = \frac{1}{|\vec r - \vec r_0(t')|}$$

Anwendung auf $\phi(\vec r, t)$

$$\phi(\vec r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec r - \vec r_0(t')|}\left(1 - \frac{\vec r - \vec r_0(t')}{|\vec r - \vec r_0(t')|}\cdot\frac{\dot{\vec r}_0(t')}{c}\right)^{-1}\Bigg|_{t' = t'(\vec r, t)}$$

Ableitg $\frac{df}{dx}$

aus der Lösung von

$$t = t' + \frac{|\vec r - \vec r_0(t')|}{c}$$

NR:
$$\frac{d}{dt'}|\vec r - \vec r_0(t')| = \frac{d}{dt'}|\Delta \vec r|$$

$$= \frac{d}{dt'}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{1/2}$$

$$\Delta x = x - x_0(t)$$

$$\frac{d}{dt'}\Delta x^2 = 2\Delta x(-\dot x_0)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(2\Delta x\,\dot x_0 + 2\Delta y\,\dot y_0 + 2\Delta z\,\dot z_0)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}}$$

.

$$= - \frac{\Delta\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{|\Delta\vec{r}|} \quad \checkmark$$

Potentiale einer bewegten Punktladung (Lienard - Wiechert)

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\left(1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}\right)^{-1}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\left(1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}\right)^{-1}$$

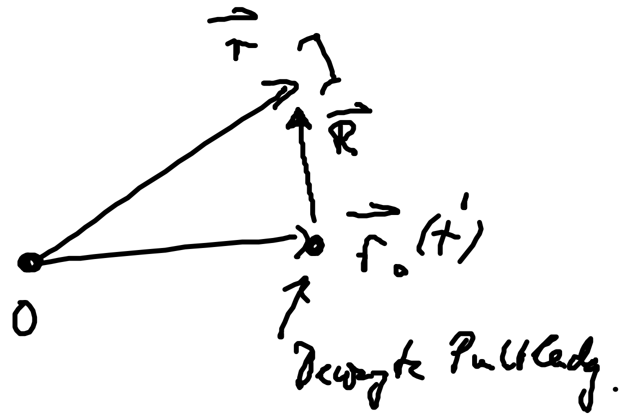
$t' = t'(\vec{r},t)$ muß bestimmt werden aus

$$t = t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}.$$

die Felder ergeben sich durch: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\vec{\beta}^2)(\vec{e}_R-\vec{\beta})}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3} + \frac{\vec{e}_R\times(\vec{e}_R-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}}{c\,R(1-\vec{\beta}\vec{e}_R)^3}\right)$$

$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_0(t')$ Abstand Beobachtungspunkt $\vec{r}$ zu Bahnkurve $\vec{r}_0$



Bewegung ist abhängig von $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec r}_0(t')}{c}$

und v. Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$

alles zur verzögerten Zeit $t' = t + \frac{|\vec r - \vec r_0|}{c}$

$$\vec B = \vec e_R \times \frac{\vec E(\vec r, t')}{c} \quad , \quad \vec e_R = \frac{\vec r - \vec r_0}{|\vec r - \vec r_0|}$$

<u>Bemerkungen</u>: a) erster Term $\sim \frac{1}{R^2}$

dominiert im Nahfeld wegen hoher Potenz

Term existiert auch für $\vec\beta = 0$

b) zweiter Term $\sim \frac{1}{R}$

dominiert im Fernfeld wegen niederer Potenz

Term existiert <u>nur</u> für $\dot{\vec\beta} \neq 0$

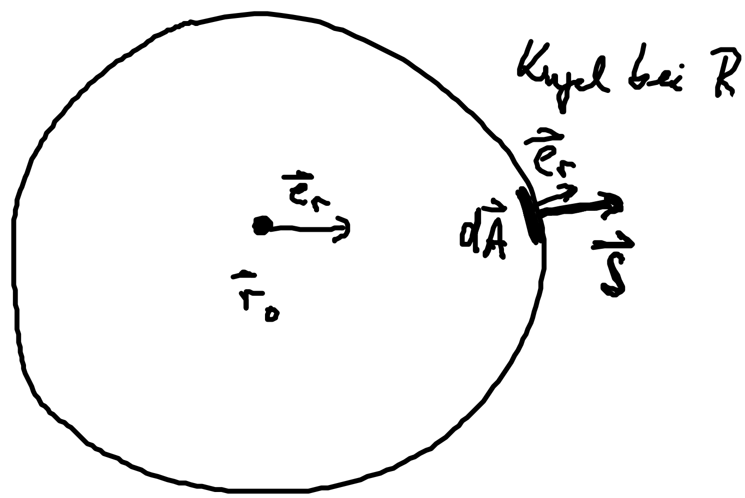
Fernfeld wird v. beschleunigte Teilchen emittiert
(abgestrahlte Welle)

c) Term $1-\beta^2$, $1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R$

sind relativistische Korrekturen

denn $|\vec{\beta}| \sim \frac{v}{c}$

d) Wann interpretiert man d. Fernfeldanteil
als Welle?



Energiestrom durch Kugel bei R

$$\int d\vec{A}\cdot\vec{S} \quad = \quad \text{Energie durch Kugel abgestrahlt}$$

an Stelle R

über Kugeloberfläche integrieren

$$\int dA\,\vec{e}_r\cdot\vec{S} = \int d\Omega\, R^2\, \vec{e}_r\cdot\vec{S} \quad \sim \text{konstant}$$

ϑ, φ $\qquad \sim \vec{E}\times\vec{B}$

• wenn $\vec{S}$ den R^2 Term kompensiert,
so ist $\vec{E}$-Fluß unabhängig v. R
und erreicht d. ganzen Raum

→ macht nur 2. Term: $S \sim \underset{\vec{E}}{\frac{1}{R}} \cdot \underset{\vec{B}}{\frac{1}{R}} = \frac{1}{R^2}$

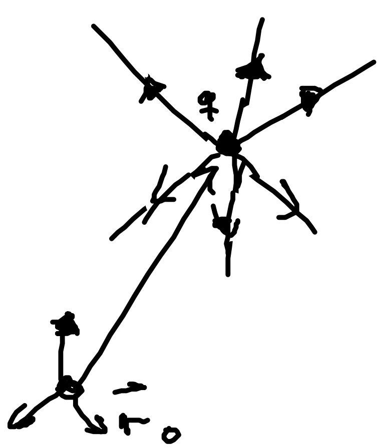
→ 2. Term $\hat{=}$ Abstrahlg. v. Wellen

6.2. Ruhende Punktladungen

6.2.1. Eine ruhende Ladung: statischer Monopol

$$\beta = 0 = \frac{|\dot{\vec{r}}_0|}{c} \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \sim \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

Punktladg am Ort $\vec{r}_0$



unabhängig:

Start v. Elektrostatik: $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \rho = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

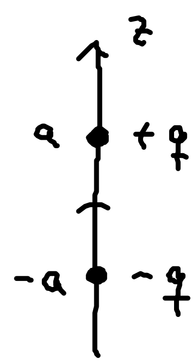
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{q\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}$$

6.2.2. Zwei ruhende Ladungen: statischer Dipol

2 Ladungen im Abstand $2a$
mit entgegengesetzen Ladungen $\pm q$



Def. d. mathem. Dipols:

für $a \to 0$, soll q wachsen, so daß $d = 2qa$ = konstant

$d \mathrel{\hat{=}}$ Dipolmoment

Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-a\vec{e}_z) - q\,\delta(\vec{r}+a\vec{e}_z)$

$$\lim_{a\to 0} \rho(\vec r) = q\left\{\underbrace{\delta(\vec r) - \delta(\vec r)}_{\text{nullte Ordg.}} + \underbrace{\partial_z \delta(\vec r)(-a) - \partial_z \delta(\vec r)\, a}_{-\partial_z \delta(\vec r)\cdot 2a}\right\}$$

bei d = konstant

$\uparrow$ Taylor in a

$$= -q\,2a\,\partial_z \delta(\vec r) = -d\,\partial_z \delta(\vec r) = -\partial_z d_z \delta(\vec r)$$

für beliebige Richtg. $\rho(\vec r) = -\vec\nabla\cdot\left(\vec d\,\delta(\vec r)\right)$

wenn x, y Richtg. mitgenommen wird $\begin{cases} -\partial_y d_y \delta(\vec r) \\ -\partial_x d_x \delta(\vec r)\end{cases}$

Die Ladungsdichte ist jetzt <u>kein</u> Monopoldichte sondern eine Dipoldichte

$$\rho_{Dipol} = -\vec\nabla\cdot\left(\vec d\,\delta(\vec r)\right)$$

Dipolmoment am Ort $\vec r$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r' \,\frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Dipol}}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r' \,\frac{-\vec\nabla'\cdot(\vec d\,\delta(\vec r'))}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3 r' \,\frac{\vec d\cdot\vec\nabla'\,\delta(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3 r\, \delta(\vec r')\,\vec d\cdot\vec\nabla' \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$$

Rand

∞ Raum

partielle Integration

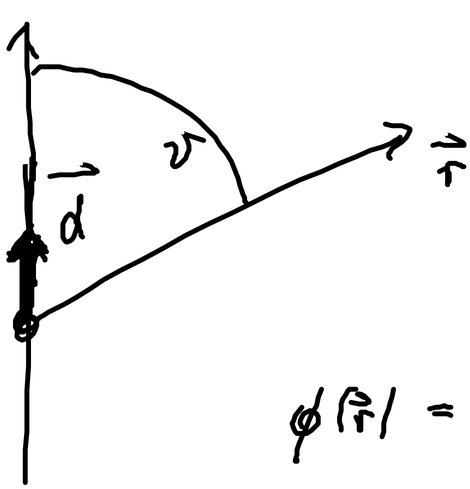
<u>NR</u>: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{d}\, f(\vec{r})\right) \;\rightarrow\; \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\, f(\vec{r})$

$$\underbrace{\partial_x d_x f(\vec{r}) + \partial_y d_y f(\vec{r})}_{\vec{\nabla}\cdot(\vec{d}\, f(\vec{r}))} = \underbrace{d_x \partial_x f(\vec{r}) + d_y \partial_y f(\vec{r})}_{\vec{d}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\; \delta(\vec{r}\,')\, \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

<u>Dipolpotential</u> $\quad \phi(\vec{r}) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$



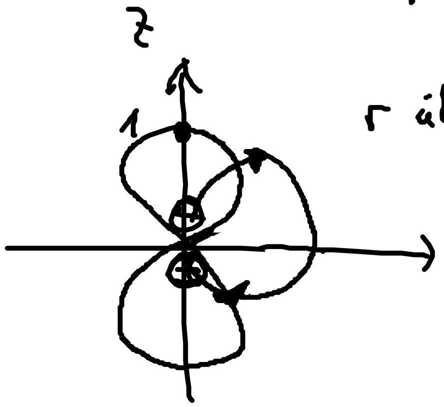
Beobachtungspunkt $\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{d\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Flächen gleichen Potentials : Äquipotentialfläche

ϕ = konstant $\qquad r^2 \sim \cos\vartheta$

$$\underbrace{r \sim \sqrt{\cos\vartheta}}_{\text{Flächen konstanten Potentials}}$$



r über $\sqrt{\cos\vartheta}$ abgetragen

E-Feld des Dipols :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta},\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3},\ \frac{\sin\vartheta}{r^3},\ 0\right)$$

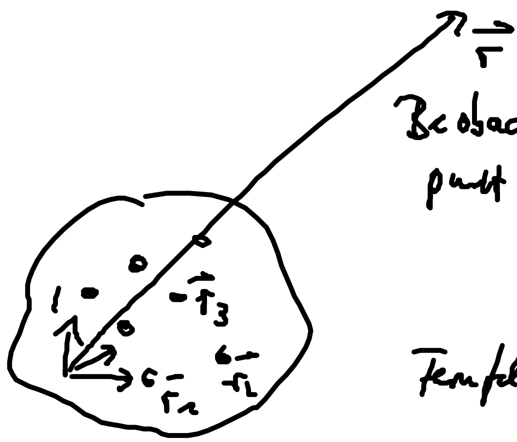
z Ausrichtg.

$e_r \; , \; e_\vartheta \; , \; e_\varphi$

$$\boxed{\vec{E}_{\text{allgem}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3\vec{r}\,(\vec{d}\cdot\vec{r}) - \vec{d}\,\vec{r}^{\,2}}{r^5}}$$

Dipol f. beliebige Orientierung im KS

6.2.3. Die Fernfeldentwicklung eines Punktladungshaufens



Beobachtungspunkt

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Fernfeld: $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$

Fernfeldentwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^{\,2} + \vec{r}\,'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}} \qquad \vec{r}^{\,2} = r^2$$

$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\Big(\underbrace{1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}_{\text{kleine Größe } \varepsilon \sim \frac{r'}{r} \ll 1}\Big)^{1/2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/2}}$$

Taylor nach ε

$$\approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

ε einsetzen und nur bis $\left(\frac{r'}{r}\right)^2$ mitnehmen

$$\approx \frac{1}{r}\Bigg(\underbrace{1}_{\phi_1} + \underbrace{\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}}_{\phi_2} \underbrace{- \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\right)^2 + \cdots}_{\text{ÜA}}\Bigg)$$

Diese Entwicklg. $\hat{=}$ Reihe von ϕ Term

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

Gesamtladg. Q

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}\,') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int d^3r' \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2}\rho(\vec{r}\,') = \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Dipolpotential