6. Feld-Dynamik ruhender u. bewegter Punktladungen

6.1. Potentiale und Felder

Punktladung mit Bahnkurve $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$

$$\rho(\vec{r},t) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t)) \;,\quad \vec{j} = q\,\dot{\vec{r}}_0(t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

Strom und Ladungsdichte als vorgegeben annehmen

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3r'\;\rho(\vec{r}',t')\;\frac{\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Greensche Funktion

Lorenzeichung

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\int d^3r'\;\frac{q\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\;\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

implizit in t' abhängig

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dt'\;\underline{\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}\right)}$$

$|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|$

Eigenschaft der δ-Fkt:

$$\int dx\, g(x)\, \delta\big(f(x) - y\big)\, dx = \frac{g(x)}{\frac{df}{dx}}\Bigg|_{y=f(x)}$$

Bestimmungsgl. f. x

bzw. $x = f^{-1}(y)$

$x = t',\ y = t$

$$f(t') = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}, \quad g(t') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}$$

Anwendg auf $\phi(\vec{r}, t)$

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \left(1 - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}\right)^{-1}\Bigg|_{t' = t'(\vec{r}, t)}$$

Ableitg $\frac{df}{dx}$

aus der Lösung von

$$t = t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}$$

NR:

$$\frac{d}{dt'} |\vec{r} - \vec{r}_0(t')| = \frac{d}{dt'} |\Delta \vec{r}|$$

$$= \frac{d}{dt'} \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{1/2}$$

$\Delta x = x - x_0(t)$

$\frac{d}{dt'} \Delta x^2 = 2\Delta x(-\dot{x}_0)$

$$= -\frac{1}{2} \frac{(2\Delta x\, \dot{x}_0 + 2\Delta y\, \dot{y}_0 + 2\Delta z\, \dot{z}_0)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}}$$

$$= -\frac{\Delta\vec{r}\cdot\vec{r}_0}{|\Delta\vec{r}|} \quad ✓$$

Potentiale eines bewegten Punktladung (Liénard-Wiechert)

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\left(1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}\right)^{-1}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q\,\mu_0}{4\pi}\,\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\left(1-\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\cdot\frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}\right)^{-1}$$

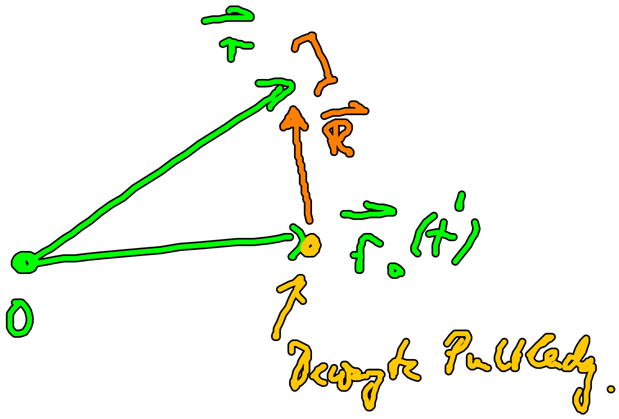
$t' = t'(\vec{r},t)$ muss bestimmt werden aus

$$t = t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}.$$

die Felder ergeben sich durch: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R-\vec{\beta})}{R^2(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3} + \frac{\vec{e}_R\times(\vec{e}_R-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}}{c\,R(1-\vec{\beta}\vec{e}_R)^3}\right)$$

$\vec{R} = \vec{r}-\vec{r}_0(t')$ Abstand Beobachtungspunkt $\vec{r}$ zu Bahnkurve $\vec{r}_0$



Bewegung ist abhängig von $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t')}{c}$

und v. Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$

aber zur verzögerten Zeit $t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$

$$\vec{B} = \vec{e}_R \times \frac{\vec{E}(\vec{r}, t')}{c} \quad , \quad \vec{e}_R = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

<u>Bemerkungen</u>: a) erster Term $\sim \frac{1}{R^2}$

dominiert im Nahfeld wegen hoher Potenz

Term existiert auch für $\vec{\beta} = 0$

b) zweiter Term $\sim \frac{1}{R}$

dominiert im Fernfeld wegen niederer Potenz

Term existiert <u>nur</u> für $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$

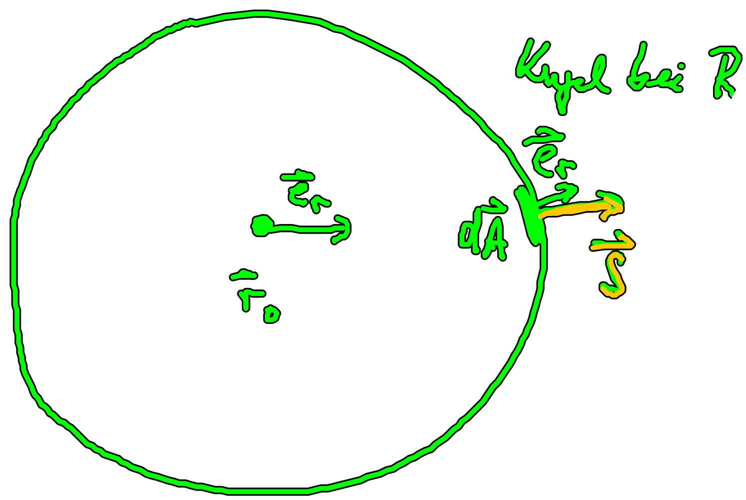
Fernfeld wird v. beschleunigte Teilchen emittiert
(abgestrahlte Welle)

c) Term $1-\vec{\beta}^2$, $1-\vec{\beta}\cdot e_R$

sind relativistische Korrekturen

denn $|\vec{\beta}| \sim \frac{v}{c}$

d) Wann interpretiert man d. Fernfeld anteil
als Welle?



Energie strom durch Kugel bei R

$\int d\vec{A}\cdot\vec{S}$ = Energie durch Kugel abgestrahlt

an Stelle R

über Kugeloberfläche integrieren

$$\int dA\, \vec{e}_r\cdot\vec{S} = \int d\Omega\, R^2\, \vec{e}_r\cdot\vec{S} \sim \text{konstant}$$

ϑ, φ $\qquad \sim \vec{E}\times\vec{B}$

• wenn $\vec{S}$ den R^2 Term kompensiert, so ist E-Fluß unabhängig v. R und erreicht d. ganzen Raum

→ macht ~ 2. Term: $S \sim \underset{\vec{E}}{\frac{1}{R}} \cdot \underset{\vec{B}}{\frac{1}{R}} = \frac{1}{R^2}$

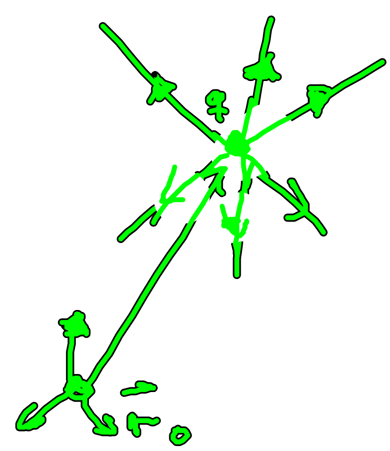
→ 2. Term ≙ Abstrahlg. v. Wellen

6.2. Ruhende Punktladungen

6.2.1. Eine ruhende Ladung: statischer Monopol

$$\beta = 0 = \frac{|\dot{\vec{r}}_0|}{c} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3} \sim \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}$$

Punktladg am Ort $\vec{r}_0$



unabhängig:

Start v. Elektrostatik: $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \qquad \rho = q\,\delta(\vec r - \vec r_0)$$

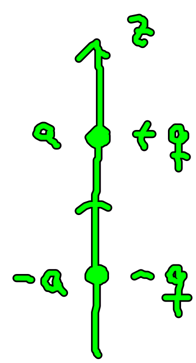
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{q\,\delta(\vec r - \vec r_0)}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec r - \vec r_0|}$$

$$\vec E = -\vec\nabla \phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec r - \vec r_0}{|\vec r - \vec r_0|^3}$$

6.2.2. Zwei ruhende Ladungen: statischer Dipol

2 Ladungen im Abstand $2a$ mit entgegengesetzten Ladungen $\pm q$



Def. d. mathem. Dipols:

für $a \to 0$, soll q wachsen, so daß $d = 2qa$ = konstant

$d \hat{=}$ Dipolmoment

Ladungsdichte $\rho(\vec r) = q\,\delta(\vec r - a\vec e_z) - q\,\delta(\vec r + a\vec e_z)$

$$\lim_{a\to 0} \rho(\vec r) = q\left\{ \underbrace{\delta(\vec r) - \delta(\vec r)}_{\text{nullte Ordg.}} + \underbrace{\partial_z \delta(\vec r)(-a) - \partial_z \delta(\vec r)\, a}_{-\partial_z \delta(\vec r)\cdot 2a} \right\}$$

bei d = konstant

Taylor in a

$$= -q 2a\, \partial_z \delta(\vec r) = -d\, \partial_z \delta(\vec r) = -\partial_z d_z \delta(\vec r)$$

für beliebige Richtg. $\vec\rho(\vec r) = -\vec\nabla\cdot\left(\vec d\ \delta(\vec r)\right)$

wenn x, y Richtg. mitgenommen wird $\begin{cases} -\partial_y d_y \delta(\vec r) \\ -\partial_x d_x \delta(\vec r) \end{cases}$

Die Ladungsdichte ist jetzt kein Monopoldichte sondern eine Dipoldichte

$$\rho_{Dipol} = -\vec\nabla\cdot\left(\vec d\ \delta(\vec r)\right)$$

Dipolmoment am Ort $\vec r$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{\rho(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} \underset{\text{Dipol}}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \frac{-\vec\nabla'\cdot(\vec d\,\delta(\vec r'))}{|\vec r - \vec r'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty} d^3r'\, \frac{\vec d\cdot\vec\nabla'\,\delta(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \delta(\vec r')\,\vec d\cdot\vec\nabla'\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$$

↗ Rand

∞ Raum

partielle Integration

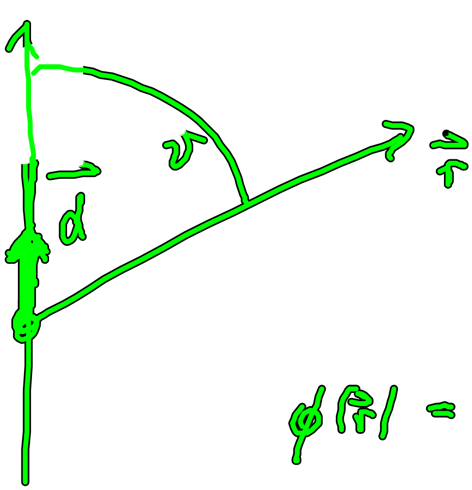
<u>NR</u>: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{d}\, f(\vec{r})\right) \to \vec{d}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})$

$$\underbrace{\partial_x d_x f(\vec{r}) + \partial_y d_y f(\vec{r})}_{\vec{\nabla}\cdot(\vec{d} f(\vec{r}))} = \underbrace{d_x \partial_x f(\vec{r}) + d_y \partial_y f(\vec{r})}_{\vec{d}\cdot\vec{\nabla} f(\vec{r})}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\, \delta(\vec{r}\,')\, \vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

<u>Dipolpotential</u> $\quad \phi(\vec{r}) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$



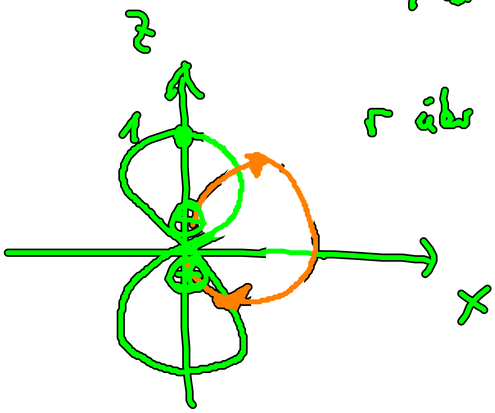
Beobachtungspunkt $\phi(\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{d\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Flächen gleichen Potentials : Äquipotentialflächen

$$\phi = \text{konstant} \qquad r^2 \sim \cos\vartheta$$

$$\underbrace{r \sim \sqrt{\cos\vartheta}}_{\text{Flächen konstanten Potentials}}$$



r über $\sqrt{\cos\vartheta}$ abgetragen

E-Feld des Dipols :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3}, \frac{\sin\vartheta}{r^3}, 0 \right)$$

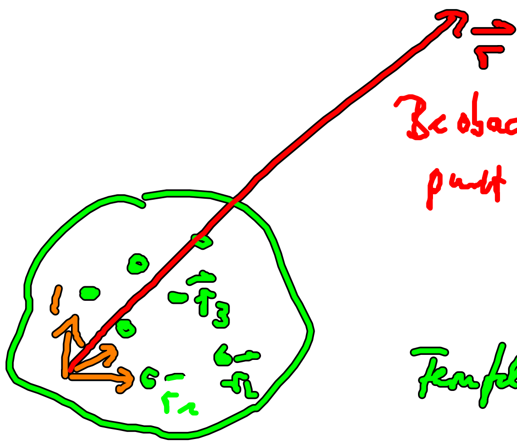
z Achsenrichtg.

$e_r \;,\; e_\vartheta \;,\; e_\varphi$

$$\boxed{\vec{E}_{allgem} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \, \frac{3\vec{r}\,(\vec{d}\cdot\vec{r}) - \vec{d}\,\vec{r}^{\,2}}{r^5}}$$

Dipol f. beliebige Orientierung im KS

6.2.3. Die Fernfeldentwicklung eines Punktladungshaufens



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Fernfeld: $|\vec{r}| \gg |\vec{r}\,'|$

Fernfeldentwicklung:

$\vec{r}^{\,2} = r^2$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^{\,2} + \vec{r}\,'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}}$$

$$= \frac{1}{r} \, \frac{1}{\Big(\underbrace{1 - 2\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}\Big)^{1/2}} = \frac{1}{r} \, \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1/2}}$$

kleine Größe $\varepsilon \sim \frac{r'}{r} \ll 1$

Taylor nach ε

$$\approx \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \cdots\right)$$

ε einsetzen und nur bis $\left(\frac{r'}{r}\right)^2$ mitnehmen

$$\approx \frac{1}{r}\Bigg(\underbrace{1}_{\phi_1} + \underbrace{\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}}_{\phi_2} \underbrace{- \frac{r'^2}{2r^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\right)^2 + \cdots}_{\text{ÜA}}\Bigg)$$

Diese Entwdlg. ≙ Reihe von ϕ Term

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$$

Gesamtladg. Q

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\vec r\,')}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int d^3r'\,\rho(\vec r\,') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int d^3r'\,\frac{\vec r\cdot\vec r\,'}{r^2}\,\rho(\vec r\,') = \frac{\vec d\cdot\vec r}{4\pi\varepsilon\, r^3}$$

Dipolpotential