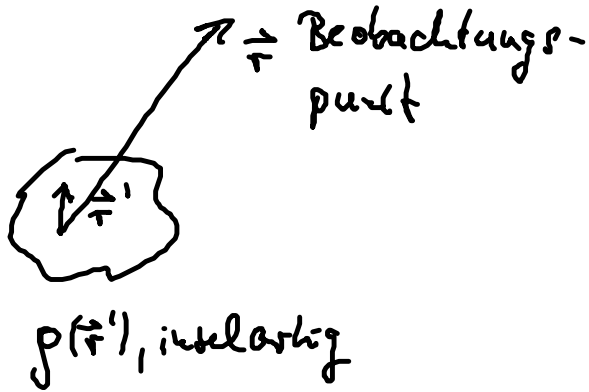


# Zusammenfassung Fernfeld- (bzw. Multipol-) Entwicklung der Elektrostatik:



$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$$

$$\phi = \sum_n \phi_n$$

mit  $\phi_n$ -Anteile die mit  $\frac{1}{r^n}$  skalieren  
also im Fernfeld an Bedeutung verlieren

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{r}^T \cdot \hat{Q} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^5} + \dots$$

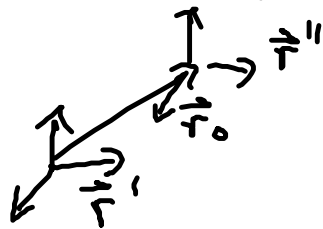
Monopolterm (Punktladung)      Dipolterm (math. Dipol)      Quadrupolterm (math. Quadrupol)

Achtung: Definition v. höheren Momenten  $\vec{d}$ ,  $\hat{Q}$  sind i.a. abhängig von Koordinatensystem ( $\vec{r}'$ )

Bsp: Dipolmoment  $\vec{d} = \int d^3r' \vec{r}' p(\vec{r}')$   
(Zitel)

1. Moment der Ladungsverteilung bzw. Schwerpunkt der Ladungsdichte, analog in Mechanik: Massendichte

KS Verschiebung:  $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}' + \vec{r}_0$



Kontakt Vektor

$$\vec{d}' = \int d^3 r'' \frac{\vec{r}''}{r''} \rho(\vec{r}'') = \int d^3 r' (\vec{r}' + \vec{r}_0) \rho(\vec{r}' + \vec{r}_0) =$$

$$= \int d^3 r' \frac{\vec{r}'}{r'} \rho(\vec{r}' + \vec{r}_0) + \int d^3 r' \frac{\vec{r}_0}{r_0} \rho(\vec{r}' + \vec{r}_0)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

$\vec{d}$

$$\sim \int d^3 r' \rho(\vec{r}' + \vec{r}_0)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$

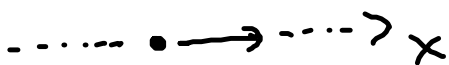
Gesamtladungsdichte  $Q$

wenn  $Q = 0$ , dann Korrektur  $= 0$

Die Momente sind eindeutig wenn das vorherige

Moment verschwindet ( $Q = 0 \Rightarrow \vec{d}$  eindeutig).

### 6.3. gleichförmig - geradlinig bewegte Punktladung



$v_x = \text{konstant}$

Bewegung entlang der

x-Achse.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c} \quad \downarrow \quad \dot{\vec{\beta}} = 0 = \text{Beschleunigung}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{R^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{e}_R)^3} \right) \Bigg|_{t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}} + \cancel{\text{Term}(\dot{\vec{\beta}})}$$

$\vec{\beta} = \vec{\beta}(t')$   
 $\vec{R} = \vec{R}(t')$   
 $\vec{e}_R = \vec{e}_R(t') = \vec{e}_R(t'(\vec{r}, t))$

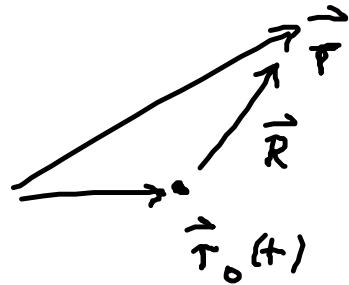
$t' = t'(\vec{r}, t)$

$t' = t'(\vec{r}, t)$  kann  $\beta$  bestimmt werden

$$t' = t - \frac{x - v_x t'}{c} \quad \xrightarrow{\text{umstellen}} \quad t' = \frac{t - x/c}{1 - \beta} \quad , \quad \beta = \frac{v_x}{c}$$

$$(x > v_x t')$$

$t' = t'(\vec{r}, t)$  bekannt



wenn  $\left. \begin{aligned} \vec{e}_R' &\equiv \vec{e}_R(t') \\ \vec{e}_R &\equiv \vec{e}_R(t) \end{aligned} \right\} \text{ur Notation}$

$$\parallel \vec{e}_R' - \vec{\beta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst}}}{\vec{\beta}} = \frac{\vec{R}' - \vec{\beta}}{|\vec{R}'|} = \frac{\vec{R}' - \vec{\beta} R'}{R'}$$

$$\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$$

$x$  Komponente

$$= \frac{(x - vt') - \beta(x - v_x t')}{R'}$$

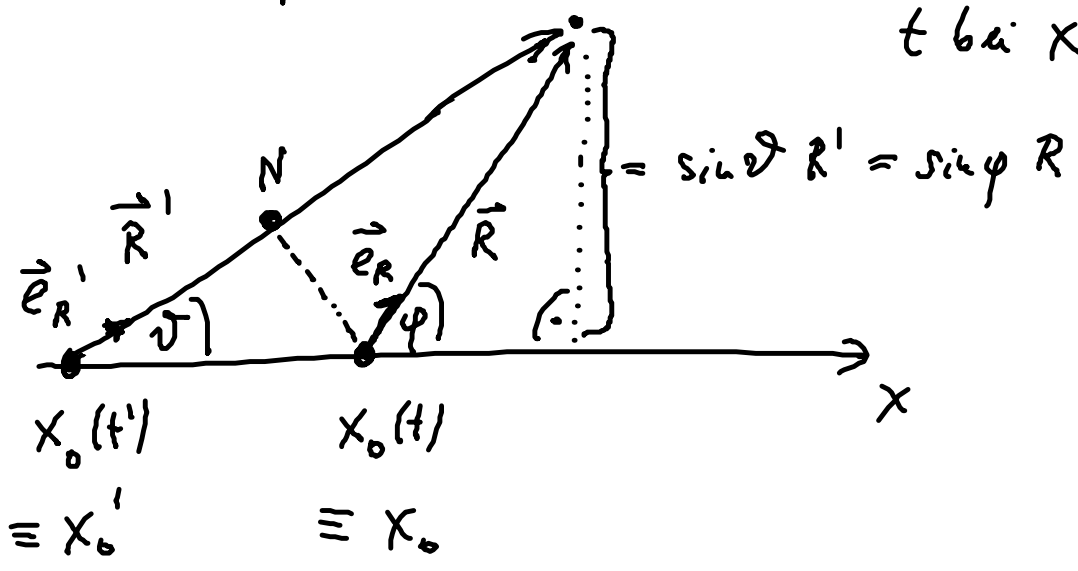
$$= \frac{(1 - \beta)(x - v_x t')}{R'} \quad \beta = \frac{v_x}{c} \quad t' = t'(x, t)$$

$$= \frac{(1 - \beta)(x - v_x(t - \frac{x}{c}))}{R'} = \frac{x - v_x t}{R'} = \frac{x - x_0(t)}{R'}$$

$$\boxed{\vec{e}_R' - \vec{\beta} = \frac{\vec{R}(t)}{R'_{\kappa t'}}$$

Parallel z. Zeit  
 $t'$  bei  $x_0'$   
 $t$  bei  $x_0$

Beobachtungspkt. P ( $\vec{r}$ )



$$\vec{e}_R' - \vec{\beta} = ? = \frac{\vec{R}}{R'}$$

$$\underbrace{(1 - \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta})}_{\text{?}} = ?$$

$$\beta = \frac{v_x}{c}$$

wird am  $\Delta$  bestimmt

$$\overline{x'_0 x_0} = v_x (t - t') = v_x \frac{(x - v_x \cdot t')}{c} = \beta R'$$

↓ eliminiert

$$\overline{x'_0 N} = \overline{x'_0 x_0} \cdot \cos \vartheta = \beta R' \cos \vartheta = R' \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta}$$

Skalarprodukt

$$\overline{NP} = R' - \overline{x'_0 N} = R' - R' \beta \cos \vartheta = R' (1 - \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta})$$

$$\overline{NP}^2 = R^2 - \overline{Nx_0}^2 = R^2 - \overline{x'_0 x_0}^2 \sin^2 \vartheta$$

Pythagoras

↓ von 1. Zeile

$$= R^2 - R'^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta$$

quadriere die 1. Zeile und gleichsetz mit letz. Zeile

$$R'^2 (1 - \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta})^2 = R^2 - R'^2 \beta^2 \sin^2 \vartheta = R^2 - R^2 \beta^2 \sin^2 \varphi$$

$$\boxed{1 - \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta} = ?}$$

$$\underbrace{(1 - \vec{e}_R' \cdot \vec{\beta})^2}_{\text{mitte}} = \frac{R^2}{R'^2} (1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)$$

lichter in  $\bar{K}$ -Feld:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2) (\vec{e}_R' - \vec{\beta})}{R'^2 (1 - \beta e_R')^3}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2) \vec{R}(t)}{R^3(t) (1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}}$$

E-Feld einer linear, gleichförmig bewegten Punktladung

Bemerkungen:

a)  $1 - \beta^2 \approx 1$  f. langsame Ladung  $v_x \ll c$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$$

J istischs Feld der Punktladung  
an Bewegungsort  $\vec{r}_0(t)$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

$$\vec{B} \neq 0 : \quad \vec{B} = \frac{\vec{e}_R' \times \vec{E}}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{q \mu_0 c}{4\pi} \frac{\vec{e}_R(t') \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$\vec{e}'_R = \vec{e}_R(t') = \vec{\beta} + \frac{\vec{R}}{R'}$$

$$\text{wfp } \vec{R} \times \vec{R} = 0$$

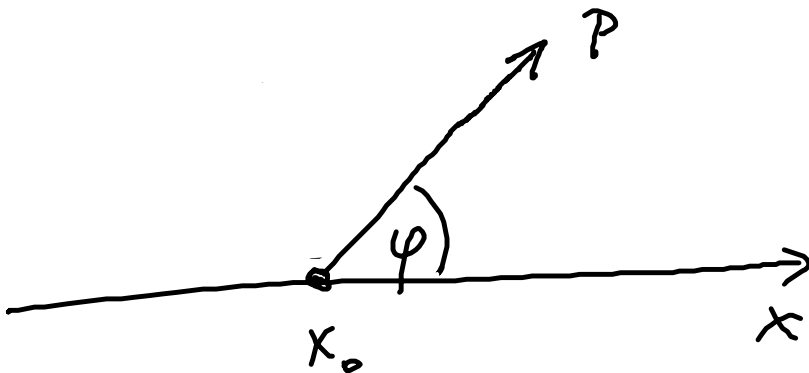
$$\vec{B} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

Jeder bewegte Ladung entspricht ein  $\vec{B}$ -Feld,

Stromen rufen  $\vec{B}$ -Felder hervor.

b) schnelle Ladungen:

$$\text{Korrekturfaktor } \frac{|\vec{E}|_{\text{schnelle Ladung}}}{|\vec{E}|_{\text{langs. Ladung}}} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$



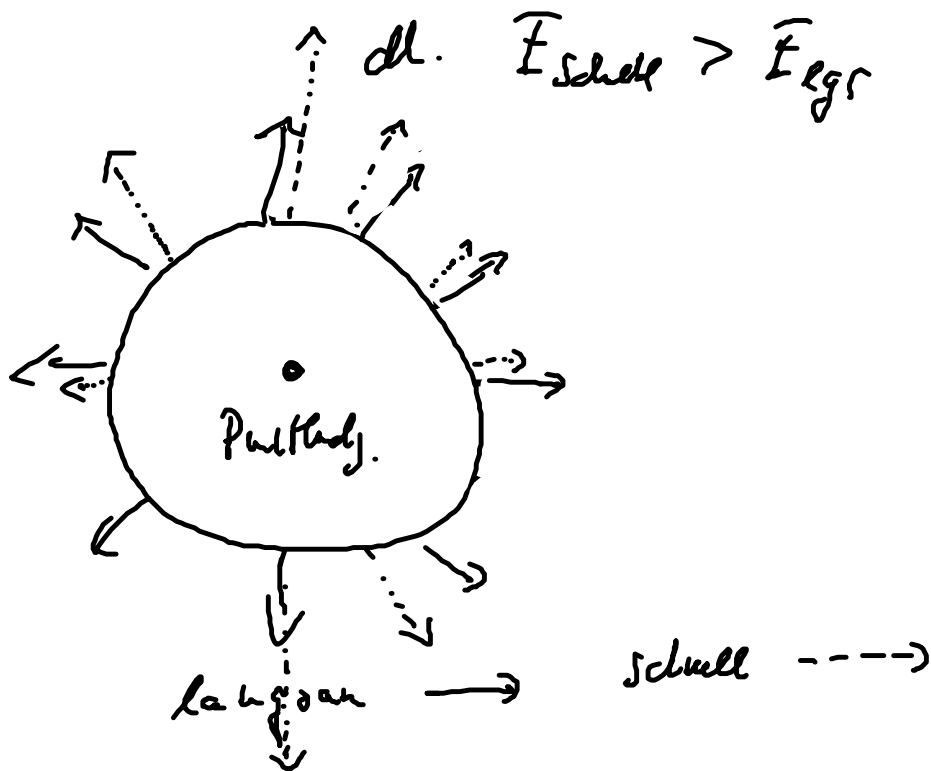


$$\left. \begin{array}{l} \varphi \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \pi \end{array} \right\} \text{Korrektes: } 1 - \beta^2$$

$$\text{d.h. } \bar{E}_{\text{schell}} < \bar{E}_{\text{egs}}$$

$$\left. \varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\} \sin \varphi \rightarrow 1$$

$$\text{d.h. } \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

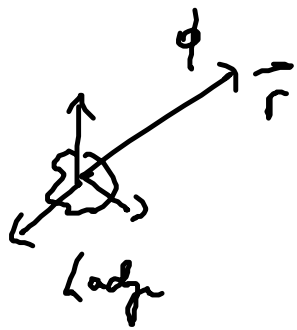


Feldlinien werden durch schnelle

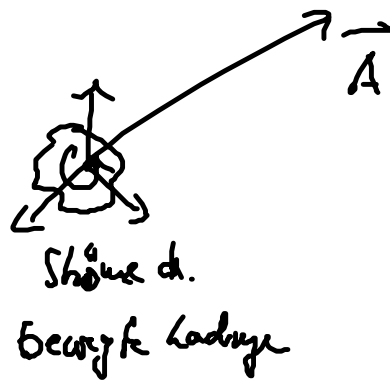
Bewegung  $1 - \beta^2$  verzerrt.

$\uparrow$   
wirkt im Vakuum und 1

# 6.3.2. Magnetostatik: Fernfeld eines Stromisels



analog



Strom d.  
bewegte Ladung

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

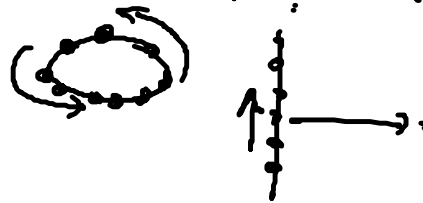
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\rho = \text{skalar}$

$j = \text{skalar}$



d. Konstruktion mit viel Punktladg:  
Strom soll zu jeder Zeit genauso aussehen



wenn man zeitunabhängige Ströme hat  
so kann man wieder ein Fernfeld erwidg.,  
diesmal d. Magnetfeld machen:

Potential ist Lorentzoid  $C \rightarrow \infty$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{r}' \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

skalar Strom

analog:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Stokes (oder)}$$

wenn  $\vec{A}(\vec{r})$  gegeben ist, so bekommt man:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart Gesetz

$$\text{Beweis: } \nabla_r \times \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{e}_i \epsilon_{ijk} \underbrace{\nabla_j j_k(\vec{r}')}_{\downarrow \nabla_r} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \vec{e}_i \epsilon_{ijk} j_k \underbrace{\partial_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}$$

---


$$\partial_j \frac{1}{\left(\sum_n (x_n - x'_n)^2\right)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_j \left(\sum_n (x_n - x'_n)^2\right)}{\left(\sum_n (x_n - x'_n)^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot \sum_n (x_n - x'_n) \overbrace{\partial_j x_n}^{\delta_{jn}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\frac{x_j - x'_j}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

---

$$= -\vec{e}_i \varepsilon_{ijk} \frac{x_j - x_j'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \int_k$$

$$= - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \int (\vec{r}')'$$