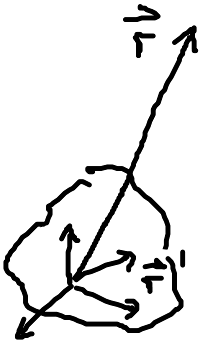
Fernfeld einer Strominsel, ausgehend vom Vektorpotential:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$$

$\vec j$ statisch = nicht zeitabhängig



$\vec r'$: Stromkoordinate in „Insel“

$\vec r$: Beobachtungspunkt f. Magnetfeld

Fernfeldentwicklung: $|\vec r'| \ll |\vec r|$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\underbrace{\int d^3r' \, \vec j(\vec r')}_{\text{analog } \phi_1} + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\underbrace{\int d^3r' \, \vec r \cdot \vec r' \, \vec j(\vec r')}_{\text{analog } \phi_2} + \dots$$

$$\vec A(\vec r) = \underbrace{\vec A_1(\vec r)}_{\text{Null}} + \underbrace{\vec A_2(\vec r)}_{\text{magnetisch Dipol}} + \dots$$

Quadrupol, etc.

A_1, A_2 jetzt konkret berechnen

A_1 : Monopolterm, sollte verschwinden

sehen uns den Term $\sum_i \partial_i \left(j_i(\vec r) \cdot x_k \right)$ an

$$= \sum_i \Big\{ \underbrace{(\partial_i j_i)}\, x_k + j_i \underbrace{\partial_i x_k}_{\delta_{ik}} \Big\}$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}_{=0 \text{ in Magnetostatik}}\, x_k + j_k$$

$=0$ in Magnetostatik: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad | \vec{\nabla} \cdot \quad \rightsquigarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

$\rightsquigarrow$ Volumenintegral

$$\rightsquigarrow \underbrace{\int d^3r \sum_i (\partial_i j_i x_k)}_{\text{partiell integriert}} = \int d^3r\, j_k$$

$i = x$ als Bsp.

$$\underbrace{\int d^3r}_{\int dx \int dy \int dz} \partial_x \underbrace{(j_x x_k)}_{\text{Stammfunktion}} = \iint dy dz\, j_x x_k \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

partiell Integration bzgl. x

jede Strom $\vec{j}(\vec{r})$ wird bei $\vec{j}(x \to \pm\infty, y, z)$ verschwinden

$$\rightsquigarrow \boxed{0 = \int d^3r\, j_k(\vec{r})}$$

Es existieren keine Monopole, $\vec{A}_1 = 0$

$$\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}' \, \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{umschreiben } (*)}$$

$$(*) = \int d^3r' \left(\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}') + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}')}_{\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{r}' \sum_i \partial_i' \left(j_i(\vec{r}')\,\vec{r}'\right)} \right)$$

siehe oben

partielle Integration

$$\vec{r}' = \sum_e \vec{e}_e x_e'$$

$$-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot \sum_{ie} \underbrace{\partial_i' x_e'}_{\delta_{ie}} \vec{e}_e \, j_i(\vec{r}')\,\vec{r}'$$

$$-\frac{1}{2}\vec{r}\cdot \underbrace{\sum_e \vec{e}_e \, j_e}_{\vec{j}} \vec{r}' = -\frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{j}(\vec{r}')\,\vec{r}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int d^3r' \, \frac{1}{2} \underbrace{\left(\vec{r}\cdot\vec{r}'\,\vec{j}(\vec{r}') - \vec{j}(\vec{r}')\cdot\vec{r}\,\vec{r}' \right)}_{-\vec{r}\times\vec{r}'\times\vec{j}(\vec{r}')}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$$

Erinnerung: $\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$

$$\boxed{A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}}$$

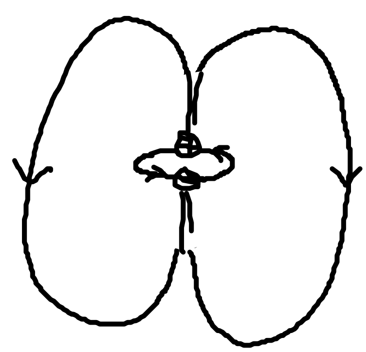
$\vec{d}$: elektrisches Dipolmoment

$= \int d^3r' \, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$

Vektorpotential d. magnetischen Dipols

μ: magnetisches Dipolmoment

Felder:



$\vec{E}_{\text{dipol}}(\vec{r})$

$\vec{B}_{\text{dipol}}(\vec{r})$

Felder erzeugt durch 2 Ladungen bzw. Leiterschleife (klein) herangerufen

el. Dipol:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{d}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{\mu}\cdot\vec{r}) - \vec{r}^{\,2}\vec{\mu}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}$$

Bemerkung: Interpretation v. $\vec{\mu}$ und Magnetismus

Punktladung: bewegte Pkt. Ladung q

Kurve $\vec{r}_0(t)$

$$\vec{j}(\vec{r}) = q\,\dot{\vec{r}}_0(t)\;\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))$$

$$\Rightarrow \vec{\mu} = \frac{1}{2}\int d^3r'\;\vec{r}\,'\times\vec{j}(\vec{r}\,')$$

$$= \frac{1}{2}q\,\vec{r}_0(t)\times\dot{\vec{r}}_0(t)$$

$$= \frac{q}{2m}\underbrace{m\,\vec{r}_0\times\dot{\vec{r}}_0}_{\vec{\ell}_0}$$

$\vec{\ell}_0$ Drehimpuls d. Ladung mit Masse m

Magnetismus kann auf elektrische Ströme in atomaren Systemen rückgeführt werden. „Bahnmagnetismus"

ebenso Spinmagnetismus (Rotation einer geladenen Kugel) $\longrightarrow$ naive klass. Vorstellg.

b) $$\vec{B}_{\text{dipol}} = \vec{\nabla}\times\vec{A}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left[\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3}\right]_k$$

Einst. Summenkonvention

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \, \underbrace{\partial_j \left(\varepsilon_{knm} \frac{\mu_n \cdot x_m}{r^3} \right)}_{\text{Produktregel}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{knm} \, \mu_n \left(\delta_{jm} r^{-3} - 3 r^{-4} \underbrace{\partial_j r}_{\text{innere Ableitg.}} x_m \right)$$

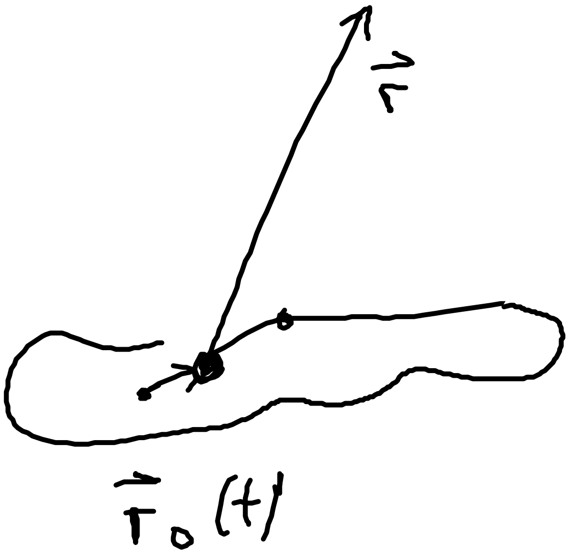
$$= \frac{x_j}{r}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{e}_i \left(\underbrace{\underbrace{\varepsilon_{imk} \, \varepsilon_{knm}}_{2\delta_{in}} \mu_n \frac{1}{r^3}}_{} - 3 \underbrace{\varepsilon_{ijk} \, \varepsilon_{knm}}_{\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}} \frac{x_j \cdot x_m}{r^5} \mu_n \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(2 \frac{\vec{\mu}}{r^3} - 3 \frac{r^2}{r^5} \vec{\mu} + \frac{3 \, \vec{r} \cdot \vec{\mu} \, \vec{r}}{r^5} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3 \, \vec{r} \cdot \vec{\mu} \, \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu} \, r^2}{r^5} \right)$$

6.4. Beschleunigte Ladungen – Fernfeld



$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0(t)|$$

nehmen d. Formel f. $\vec{E}$-Feld und sehen uns

Grenzfall: $|\vec{r}| \gg |\vec{r}_0| \to \vec{R} = \vec{r} - \underset{\uparrow \atop \vec{r}_0(t')}{\vec{r}_0} \approx \vec{r}$

$\longrightarrow$ man hat kein Problem mehr

mit $t' = t'(\vec{r}, t)$

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{|\vec{r}|}{c}}_{\text{Kugelwellenartig}}$$

Nahfeldterm mit $\frac{1}{R^2} \to 0$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Fernfeldterm $\frac{1}{R} \longrightarrow$ mitnehmen

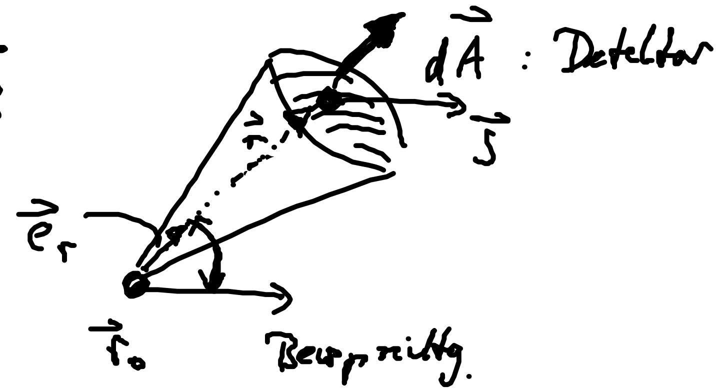
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{e}_r \times (\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}}{c r (1 - \vec{\beta}\vec{e}_r)^3} \Bigg| \text{ alle zur Zeit } t$$

$$\vec\beta = \frac{\dot{\vec r}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c}$$

$$\vec B(\vec r, t) = \frac{1}{c}\,\vec e_r \times \vec E(\vec r, t)$$

beobachtbar ist E-Stromdichte

$$\vec S = \frac{1}{\mu_0}\,\vec E \times \vec B$$



detektiert

$$dP = d\vec A \cdot \vec S = \underbrace{r^2\, d\Omega}_{dA}\, \vec e_r \cdot \vec S$$

interessant ist $\vec S \cdot \vec e_r$, es hilft auf: $\vec X = \vec e_r \times (\vec e_r - \vec\beta) \times \dot{\vec\beta}$

$$\vec S \sim \underset{(\vec E)}{\vec X} \times \underset{(\vec B)}{\vec e_r \times \vec X} = \underbrace{\vec X \cdot \vec X}_{\text{entscheidend}}\, \vec e_r - \underbrace{\vec X \cdot \vec e_r}_{=0,\ \vec e_r \perp \vec X}\, \vec X$$

$\vec S \cdot \vec e_r \sim \vec X^2$

$\beta(t')$

$$\vec S \cdot \vec e_r = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c r^2} \frac{\left| \vec e_r \times (\vec e_r - \vec\beta) \times \dot{\vec\beta} \right|^2}{(1 - \vec\beta \cdot \vec e_r)^6} \Bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}}$$

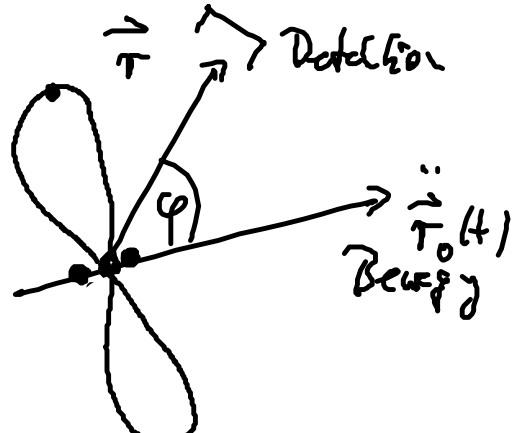
6.4.1. langsam bewegte Ladung ($\beta \ll 1$)

$$dP \sim \vec e_r \cdot \vec S = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{\left| \vec e_r \times \vec e_r \times \ddot{\vec r}_0 \right|^2}{r^2}$$

$$= \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \underbrace{\frac{\left| \ddot{\vec r}_0 - (\vec e_r \cdot \ddot{\vec r}_0)\, \vec e_r \right|^2}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\ddot r_0^2 - 2 \ddot r_0^2 \cos^2\varphi + \ddot r_0^2 \cos^2\varphi \right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\ddot r_0^2 - \ddot r_0^2 \cos^2\varphi \right) = \frac{1}{r^2} \ddot r_0^2 \underline{\underline{\sin^2\varphi}}$$



Abstrahlung proportional $\sin^2\varphi$

Die maximale Abstrahlung ist $\perp$ zur Beschleunigungsrichtung.

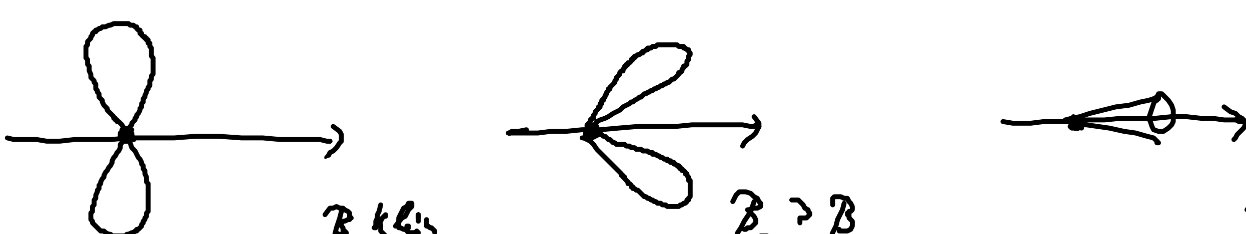
6.4.2. Schnelle, geradlinig beschleunigte Punktladung

$$\vec\beta \sim \dot{\vec\beta} \;\to\; \vec\beta \times \dot{\vec\beta} = 0 \qquad \dot{\vec\beta},\, \vec\beta$$

$$\vec e_r \cdot \vec S = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c}\, \frac{\left(\vec e_r \times (\vec e_r \times \dot{\vec\beta})\right)^2}{r^2 (1 - \vec\beta\cdot\vec e_r)^6}\Bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}}$$

$$\sim \frac{\ddot r_0 \sin^2\varphi}{(1 - \dot r_0 \cos\varphi)^6} \qquad \text{~~durch Abh.~~}$$

Abhängigkeit von φ in Nenner: (Maxima der Funktion d. Ableitg.)



β_1 klein $\qquad \beta_2 > \beta_1 \qquad \beta_3 > \beta_2$

design d. Abstrahlg. ! mgl.