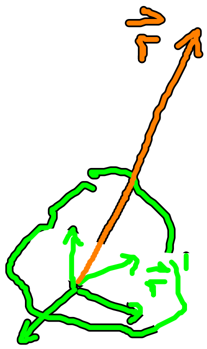
Fernfeld einer Strominsel, ausgehend vom Vektorpotential:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \qquad \vec{j} \text{ statisch} = \text{nicht zeitabhängig}$$



$\vec{r}\,'$: Stromkoordinate in „Insel"

$\vec{r}$: Beobachtungspunkt f. Magnetfeld

Fernfeldentwicklung: $|\vec{r}\,'| \ll |\vec{r}|$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r} \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{analog } \Phi_1} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' \, \vec{r}\cdot\vec{r}\,' \, \vec{j}(\vec{r}\,')}_{\text{analog } \Phi_2} + \ldots$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\vec{A}_1(\vec{r})}_{\text{Null}} + \underbrace{\vec{A}_2(\vec{r})}_{\text{magnetischer Dipol}} + \underbrace{\ldots}_{\text{Quadrupol, etc.}}$$

A_1, A_2 jetzt konkret berechnen

A_1 : Monopolterm, sollte verschwinden

sehen uns den Term $\sum_i \partial_i \left(j_i(\vec{r}) \cdot x_k \right)$ an

$$= \sum_i \Big\{ \underbrace{(\partial_i j_i)}\, x_k + j_i \underbrace{\partial_i x_k}_{\delta_{ik}} \Big\}$$

$$= \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}}_{=0 \text{ in Magnetostatik}}\, x_k + j_k$$

$=0$ in Magnetostatik: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \;\;|\, \vec{\nabla}\cdot \;\;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

$\Rightarrow$ Volumenintegral

$$\Rightarrow \underbrace{\int d^3r \sum_i (\partial_i j_i x_k)}_{\text{partiell integriert}} = \int d^3r\, j_k$$

$i = x$ als Bsp.

$$\underbrace{\int d^3r}_{\int dx \int dy \int dz} \partial_x \big(\underbrace{j_x x_k}_{\text{Stammfunktion}}\big) = \iint dy\,dz\; j_x x_k \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

partielle Integration bzgl. x

jeder Strom $\vec{j}(\vec{r})$ wird bei $\vec{j}(x \to \pm\infty, y, z)$ verschwinden

$$\Rightarrow \boxed{0 = \int d^3r\, j_k(\vec{r})}$$

Es existieren keine Monopole, $\vec{A}_1 = 0$

$$\vec A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \underbrace{\int d^3r' \; \vec r \cdot \vec r' \, \vec j(\vec r')}_{\text{umschreiben } (*)}$$

$$(*) = \int d^3r' \left(\frac{1}{2} \vec r \cdot \vec r' \, \vec j(\vec r') + \underbrace{\frac{1}{2} \vec r \cdot \vec r' \, \vec j(\vec r')}_{\frac{1}{2} \vec r \cdot \vec r' \sum_i \partial_i' \left(j_i(\vec r') \, \vec r' \right)} \right)$$

siehe oben

partielle Integration

$$\vec r' = \sum_l \vec e_l \, x_l'$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \vec r \cdot \vec r' \sum_i \partial_i' \left(j_i(\vec r') \, \vec r' \right)}_{-\frac{1}{2} \vec r \cdot \sum_{il} \underbrace{\partial_i' x_l'}_{\delta_{il}} \, \vec e_l \, j_i(\vec r') \, \vec r'}$$

$$-\frac{1}{2} \vec r \cdot \underbrace{\sum_l \vec e_l \, j_l}_{\vec j} \, \vec r' = -\frac{1}{2} \vec r \cdot \vec j(\vec r') \, \vec r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \int d^3r' \; \frac{1}{2} \underbrace{\left(\vec r \cdot \vec r' \, \vec j(\vec r') - \vec j(\vec r') \cdot \vec r \, \vec r' \right)}_{-\vec r \times \vec r' \times \vec j(\vec r')}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3} \,, \quad \vec{\mu} = \frac{1}{2} \int d^3r' \, \vec{r}\,' \times \vec{j}(\vec{r}\,')$$

Erinnerung: $\underbrace{\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3}}$

$\vec{d}$: elektrisches Dipolmoment

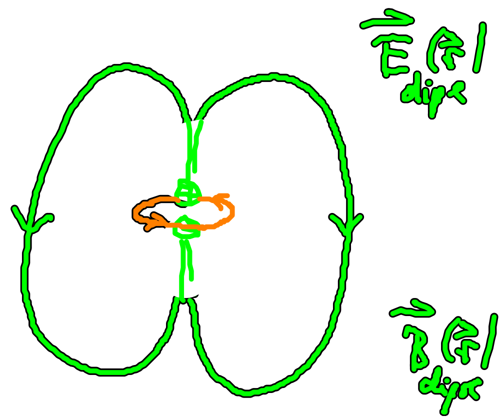
$$= \int d^3r' \, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$$

$$\boxed{A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \, \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{r^3}}$$

Vektorpotential d. magnetischen Dipoles

μ : magnetisches Dipolmoment

Felder :



Felder erzeugt durch 2 Ladungen bzw. Leiterschleife (klein) Lösungen von fern

el. Dipol :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}\,(\vec{d} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} \,, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}\,(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{\mu}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^5}$$

Bemerkung : Interpretation v. $\vec{\mu}$ und Magnetismus

Punktladung: Bewegung d. Ladung q

Bahn $\vec r_0(t)$

$$\vec j(\vec r) = q\,\dot{\vec r}_0(t)\,\delta(\vec r - \vec r_0(t))$$

$$\leadsto \vec\mu = \frac{1}{2}\int d^3r'\,\vec r\,' \times \vec j(\vec r\,')$$

$$= \frac{1}{2}q\,\vec r_0(t)\times\dot{\vec r}_0(t)$$

$$= \frac{q}{2m}\underbrace{m\,\vec r_0\times\dot{\vec r}_0}_{\vec\ell_0}$$

$\vec\ell_0$ Drehimpuls d. Ladung mit Masse m

Magnetismus kann auf elektrische Ströme in atomaren Systemen zurückgeführt werden „Bahnmagnetismus“

ebenso Spinmagnetismus (Rotation einer geladenen Kugel)

$\longrightarrow$ naive klass. Vorstellg.

b) $$\vec B_{\text{dipol}} = \vec\nabla\times\vec A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec\nabla\times\left(\frac{\vec\mu\times\vec r}{r^3}\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec e_i\,\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\left[\frac{\vec\mu\times\vec r}{r^3}\right]_k$$

Einst. Summenkonvention

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \left(\varepsilon_{knm} \frac{\mu_n x_m}{r^3} \right)$$

Produktregel

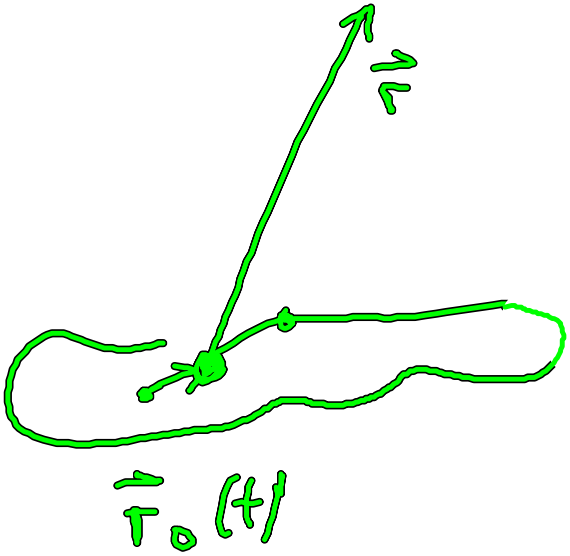
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{knm}\, \mu_n \left(\delta_{jm}\, r^{-3} - 3 r^{-4} \underbrace{\partial_j r}_{\text{inn. Ableitg.}\; = \frac{x_j}{r}}\, x_m \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\, \vec{e}_i \left(\underbrace{\varepsilon_{imk}\, \varepsilon_{knm}}_{2\delta_{in}}\, \mu_n \frac{1}{r^3} - 3 \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{knm}}_{\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn}} \frac{x_j x_m}{r^5}\, \mu_n \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(2 \frac{\vec{\mu}}{r^3} - 3 \frac{r^2}{r^5} \vec{\mu} + \frac{3\, \vec{r} \cdot \vec{\mu}\, \vec{r}}{r^5} \right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\, \vec{r} \cdot \vec{\mu}\, \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}\, r^2}{r^5} \right)$$

6.4. Beschleunigte Ladungen – Fernfeld



$$|\vec r| \gg |\vec r_0(t)|$$

nehmen d. Formel f. $\vec E$-Feld und sehen uns

Grenzfall: $|\vec r| \gg |\vec r_0|$ $\rightarrow$ $\vec R = \vec r - \underbrace{\vec r_0}_{\vec r_0(t')} \approx \vec r$

$\longrightarrow$ man hat kein Problem mehr

mit $t' = t'(\vec r, t)$

$$t' = t - \frac{|\vec r - \vec r_0(t)|}{c} \approx \underbrace{t - \frac{|\vec r|}{c}}_{\text{Kugelwellenartig}}$$

Nahfeldterm mit $\frac{1}{R^2} \rightarrow 0$

$$\vec e_r = \frac{\vec r}{|\vec r|}$$

Fernfeldterm $\frac{1}{R} \longrightarrow$ mitnehmen

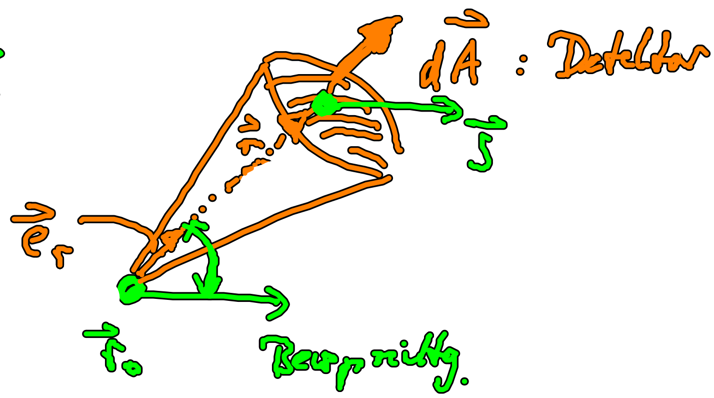
$$\vec E(\vec r, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec e_r \times (\vec e_r - \vec\beta) \times \dot{\vec\beta}}{c r (1 - \vec\beta \vec e_r)^3} \Bigg| \text{ alles zur Zeit } t$$

$$\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{r}}_0\left(t - \frac{r}{c}\right)}{c}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\,\vec{e}_r \times \vec{E}(\vec{r},t)$$

beobachtbar ist E-Stromdichte

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E} \times \vec{B}$$



detektiert

$$dP = d\vec{A}\cdot\vec{S} = \underbrace{r^2\, d\Omega}_{dA}\;\vec{e}_r\cdot\vec{S}$$

interessant ist $\vec{S}\cdot\vec{e}_r$, es hilft auf: $\vec{X} = \vec{e}_r \times (\vec{e}_r - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}$

$$\vec{S} \sim \underset{(\vec{E})}{\vec{X}} \times \underset{(\vec{B})}{\vec{e}_r \times \vec{X}} = \underbrace{\vec{X}\cdot\vec{X}}_{\text{unbedeutend}}\,\vec{e}_r - \underbrace{\vec{X}\cdot\vec{e}_r}_{=0,\ \vec{e}_r \perp \vec{X}}\,\vec{X}$$

$$\vec{S}\cdot\vec{e}_r \sim \vec{X}^2$$

$\beta(t')$

$$\vec{S}\cdot\vec{e}_r = \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c\, r^2}\,\frac{\left|\vec{e}_r\times(\vec{e}_r-\vec{\beta})\times\dot{\vec{\beta}}\right|^2}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_r)^6}\Bigg|_{t'=t-\frac{r}{c}}$$

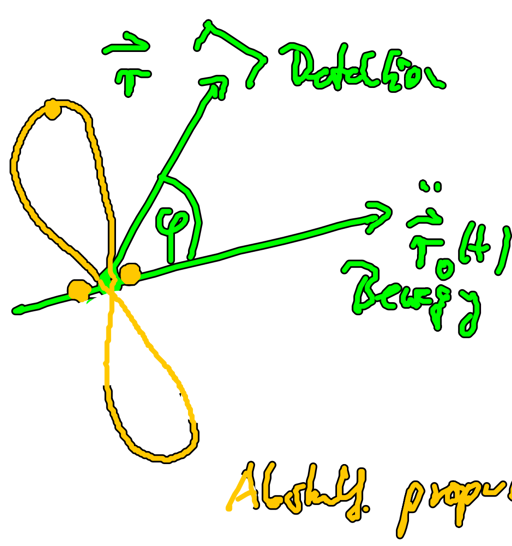
6.4.1. langsam bewegte Ladung ($\beta \ll 1$)

$$dP \sim \vec{e}_r\cdot\vec{S} = \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\,\frac{\left|\vec{e}_r\times\vec{e}_r\times\ddot{\vec{r}}_0\right|^2}{r^2}$$

$$= \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\,\underbrace{\frac{\left|\ddot{\vec{r}}_0-(\vec{e}_r\cdot\ddot{\vec{r}}_0)\vec{e}_r\right|^2}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\ddot{r}_0^2 - 2\ddot{r}_0^2\cos^2\varphi + \ddot{r}_0^2\cos^2\varphi\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\ddot{r}_0^2 - \ddot{r}_0^2\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{r^2}\,\ddot{r}_0^2\sin^2\varphi$$



Abstrahlg. proportional $\sin^2\varphi$

Die maximale Abstrahlg ist $\perp$ zu Beschleunigg. richtg.

6.4.2. Schnelle, geradlinig beschleunigte Punktladung

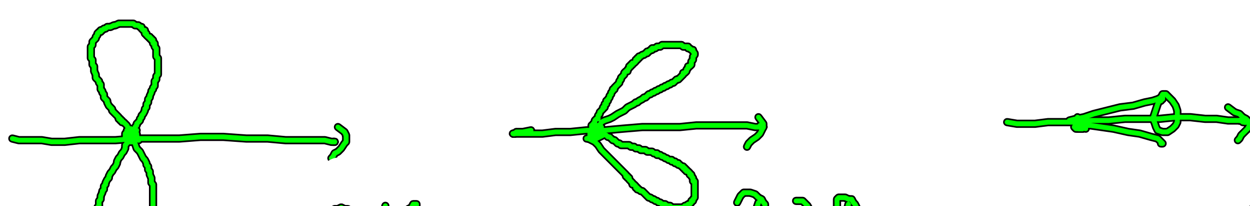
$$\vec\beta \sim \dot{\vec\beta} \rightarrow \vec\beta \times \dot{\vec\beta} = 0 \qquad \dot{\vec\beta}, \vec\beta$$

$$\vec e_r \cdot \vec S = \frac{q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c} \frac{\left(\vec e_r \times (\vec e_r \times \dot{\vec\beta})\right)^2}{r^2 (1 - \vec\beta \vec e_r)^6} \Bigg|_{t' = t - \frac{r}{c}}$$

$$\sim \frac{\ddot r_0 \sin^2\varphi}{(1 - \dot r_0 \cos\varphi)^6}$$

~~durch Ablei~~

Abhängigkeit von φ im Nenner: (Maximum der Funktion d. Ableitg.)



β_1 klein $\qquad \beta_2 > \beta_1 \qquad \beta_3 > \beta_2$

Design d. Abstrahlg. ! vgl.