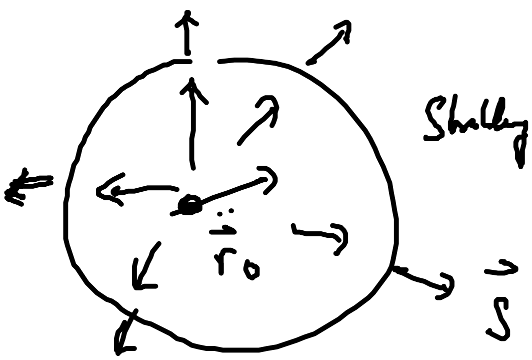
6.5. Strahlungsdämpfung

beschleunigte Teilchen strahlen elektromagnetische Energie ab

→ Energieverlust, Bewegung muß abgebremst werden

$\hat{=}$ Strahlungsdämpfung

$\vec{S}$ ist Leistung die durch Fläche abgestrahlt wird



Leistung $\hat{=}$ $\int d\vec{A}\cdot\vec{S}$

abgestrahlte Leistung : Poynting vektor durch Fläche $\quad \left(|\vec{\beta}| = \frac{|\vec{v}|}{c}\right)$

$$\int d\vec{A}\cdot\vec{S} = \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3 \cancel{r^2}}\,\ddot{r}_0^{\,2}(t)\;\underbrace{\underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{\text{Kugelkoord.}}\,\sin^2\vartheta \int d\varphi\, \cancel{r^2}}_{\frac{8\pi}{3}}$$

ganze Kugel

langsam bewegt

(φ in letztes VL)

$$= \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \ddot{r}_0^{\,2}(t)$$

rückwirkende Kraft auf das Teilchen (phänomenologisch)

Energie (kinet.): $\frac{d}{dt} E_{kin} = \vec{v} \cdot \underline{\underline{\vec{F}}}$ = Leistung

Strahlungskraft die auf das Teilchen wirkt

$$\Delta E_{kin} = \int dt\, \vec{v} \cdot \vec{F} \qquad \dot{\vec{r}}_0 = v(t)$$

Analogie:

$$\int dt\, \underset{\sim\sim}{v(t)}\, \underline{\underline{F(t)}} = \int dt\, \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \dot{v}^2(t)$$

$$= \int dt\, \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d}{dt}v \frac{d}{dt}v$$

$$= -\int dt\, \underline{\underline{\frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \ddot{v}}}\, \underset{\sim\sim}{v}$$

Strahlungskraft

Strahlungskraft: $\vec{F} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \dddot{r}_0$

Hier fällt weg, weil auf linke Seite steht die Leistg. der abgestrahlten Wellen → Verlust leistg.

einsetzen in Newtongleichg.:

$$m \ddot{r}_0 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \dddot{r}_0 + F_{ext}$$

$$\ddot{r}_0 = \underbrace{\frac{2}{3} \frac{q^2}{m 4\pi\varepsilon_0 c^3}}_{\tau_{rad}} \dddot{r} + \frac{F_{ext}}{m}$$

$$\ddot{r}_0 = \tau_{rad} \dddot{r}_0 + \frac{F_{ext}}{m}$$

$\tau_{rad} = 10^{-24}\,s$ sehr klein

- Strahlungskorrekturen sind klein!
- aber physikalische Effekte sind beobachtbar
- wenn diese Gleichg. exakt gelöst werden soll, so muß $\ddot{r}_0(t=0)$ als AB gegeben sein,

die hängt aber v. Kraft ab → Schwierig

– einfache Lösg. störungstheoretisch f.

harmonischen Oszillator: F_{ext}: harmonischer Oszillator

z.B. Elektr. in Atom

$$\underbrace{\ddot{r}_0 + \omega_0^2 r_0} = \tau_{rad} \dddot{r}_0$$

$\lambda = \pm i \omega_0$

aus $e^{\lambda t}$-Ansatz

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = \underbrace{\tau_{rad} \lambda^3}_{\text{Störung (klein)}}$$

1. Ordng.

$$\underline{\underline{\lambda^{(1)}}} = \pm i \omega_0$$

Lösg der λ-Gleichg: $\lambda = \sqrt{\tau_{rad} \lambda^3 - \omega_0^2}$

$$= i \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^3 \tau_{rad}}$$

soll τ_{rad} kleine Korrektur darstellen (1. Ordng. Taylor f. $\sqrt{\ }$)

$$\longrightarrow \lambda \approx i \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^3 \tau_{rad}}{2 \omega_0^2}\right)$$

Störungstheorie

einsetzen

$$\lambda^{(1)} = i\omega_0 - \omega_0^2 \tau_{rad} \frac{1}{2}$$

Lösg: $e^{i\omega_0 t - \omega_0^2 \tau_{rad} t \frac{1}{2}} \to e^{i\omega_0 t - \gamma_{rad} t}$

Es entsteht eine gedämpfte Oszillatorlösung, durch die E-Abstrahlg. über elektromagn. Welle.

Rech $\frac{\omega_0^2 \tau_{rad}}{2} = \gamma_{rad}$

$$\omega_0 = 10^{15} \frac{1}{s} \quad , \tau_{rad} \approx 10^{-24} s$$

$$\gamma_{rad} \sim 10^6 / s$$

$$\gamma_{rad}^{-1} = 10^{-6} s$$

ist keine ganz schlechte Abschätzg. f. spontan Emissions zeit

7. Makroskopische Maxwellgleichungen

7.1. Räumliche Mittlung

mikroskopische Adressierung von Punktladg. (Elektron, Kerne)

ist f. makroskop. Objekt **nicht mgl.** $\sim 10^{23}$ Teilchen

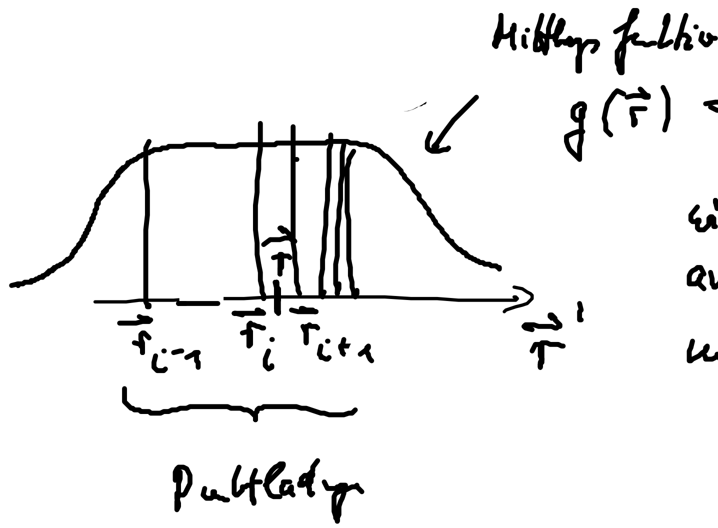
Idee: abstrahieren v. klein, atomaren Skala

$$a_0 \quad < \quad \ell \quad < \quad \lambda$$

atomare Skala	mesoskopische Skala	Wellenlängen skala
0,5 Å		500 nm
loswerden	hier arbeiten: Optik!	

Meßgerät mitteln

↪ Mittelungsfunktion



$g(\vec{r}) = g(-\vec{r})$

wird als gerade angenommen, nicht nötig i.a.

$$\rho(\vec{r}) \longrightarrow \rho_{\text{gemittelt}}(\vec{r})$$

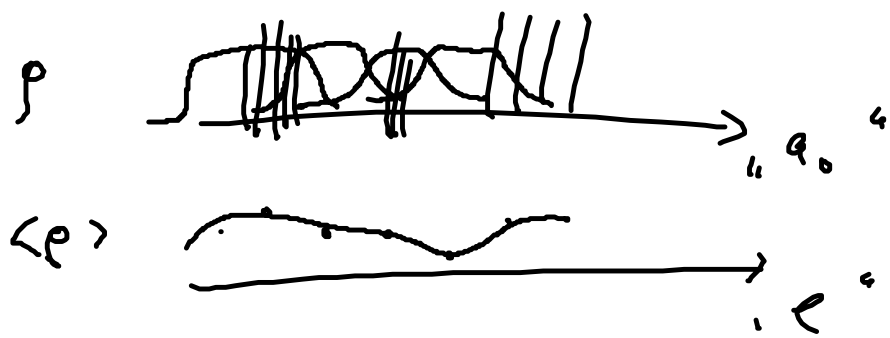
$(a_0) \qquad (\ell)$

$$= \langle \rho \rangle$$

$$\langle \rho(\vec r)\rangle = \int d^3r'\, g(\vec r' - \vec r)\, \rho(\vec r')$$

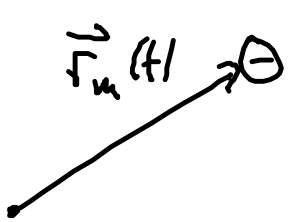
$g(\vec r' - \vec r)$ ist um $\vec r$ lokalisiert und „zählt" die Punktladungen im Mittelungsbereich

→ damit erhält man Ladungsverteilung auf der mesoskop. Skala.



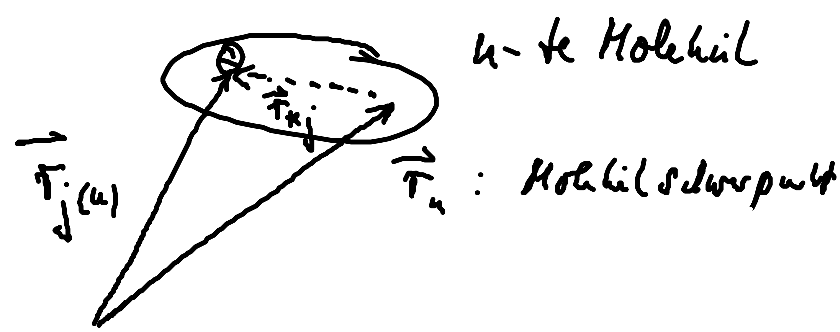
7.2. Makroskopische Ströme u. Ladungen

frei bewegliche Ladungen



(Metallelektronen)

gebundene Ladungen



j-tes Teilchen im n-ten Molekül

a) Mittelung der Ladungsdichte

$$\rho(\vec r) = \underset{\text{(frei)}}{\sum_n q_n\, \delta(\vec r - \vec r_n)} + \underset{\text{(Moleküle)}}{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}\, \delta(\vec r - \vec r_{j(n)})}$$

(i) freie bewegl. Ladungen

$$\langle \rho(\vec r) \rangle_{\text{frei}} = \sum_n q_n\, g(\vec r - \vec r_n) \equiv \rho_n(\vec r)$$

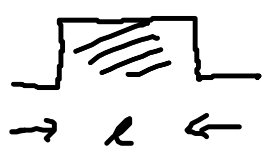
„verschmierte", makroskopische Dichte d. freien Ladungsträger

<u>Bsp</u>: homogen geladene Kugel:

$$\rho_n = \sum_n q_n\, g(\vec r - \vec r_n) = \underbrace{q \frac{N}{V}}_{\text{Ladungsdichte}}\, \theta(R_0 - |\vec r|)$$

$$q = q_n$$

R_0

$g \equiv$  $\equiv \frac{1}{V}$

N: Zahl LT im V

(ii) gebundene Ladungen

$|\vec r_{nj}| \ll |\vec r_n|$ siehe Skizze

Taylor

$$\langle \rho(\vec{r}) \rangle_{\text{gebunden}} = \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r' \, g(\vec{r}-\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n - \vec{r}_{nj})$$

$$= \underbrace{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}}_{\text{neutrales Molekül} \to \sum_{\text{Ladg.}} = 0} \int d^3r' \, g(\vec{r}-\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n) \qquad \text{1. Term}$$

$$+ \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r' \, g(\vec{r}-\vec{r}\,') \left(-\vec{r}_{nj} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n) \right)$$

partielle Integration

$$= \underbrace{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec{r}_{nj}}_{\text{Dipolmoment d. Moleküls } \vec{d}_n} \cdot \int d^3r' \, \vec{\nabla}_{r'} \, g(\vec{r}-\vec{r}\,') \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_n)$$

$$= \sum_n \vec{d}_n \cdot \vec{\nabla}_{r_n} \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$= - \sum_n \vec{d}_n \cdot \vec{\nabla}_r \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \underbrace{\sum_k \vec{d}_k \, g(\vec{r}-\vec{r}_k)}$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \qquad \vec{P} \mathrel{\hat{=}} \text{mikroskopische Dipoldichte}$$

Zusammenfassung zur gemittelten Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \hat{Q})$$

makroskopische Ladungsdichte — makroskopische Dipolladung — Quadrupolanteil (3. Term Taylor)