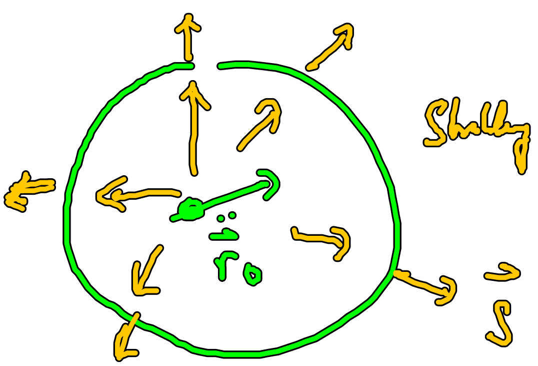
6.5. Strahlungsdämpfung

beschleunigte Teilchen strahlen elektromagnetische Energie ab

→ Energieverlust, Bewegung muß abgebremst werden

≙ Strahlungsdämpfung

$\vec{S}$ ist Leistung die durch Fläche abgestrahlt wird



Leistung $\hat{=} \int d\vec{A}\cdot\vec{S}$

abgestrahlte Leistung: Poyntingvektor durch Fläche $\qquad (|\vec{\beta}| = \frac{|\vec{v}|}{c})$

$$\underbrace{\int d\vec{A}\cdot\vec{S}}_{\text{ganze Kugel}} \underset{\uparrow\ \text{langsam bewegt}}{=} \frac{q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3 \cancel{r^2}}\,\ddot{\vec{r}}_0^{\,2}(t)\underbrace{\underbrace{\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta\,\sin^2\vartheta}_{\text{Kugelkoord.}}\ \int d\varphi\,\cancel{r^2}}_{\frac{8\pi}{3}}$$

(φ in letzter VL)

$$= \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\ddot{\vec r}_0^{\,2}(t)$$

zurückwirkende Kraft auf das Teilchen (phänomenologisch)

Energie (kinet.): $\frac{d}{dt} E_{kin} = \vec v \cdot \underline{\underline{\vec F}}$ = Leistung

Strahlungskraft die auf das Teilchen wirkt

$$\Delta E_{kin} = \int dt\; \vec v \cdot \vec F \qquad\qquad \dot{\vec r}_0 = v(t)$$

Analogie:

$$\int dt\; v(t)\, F(t) = \int dt\; \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\dot v(t)^2$$

$$= \int dt\; \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,\frac{d}{dt}v\;\frac{d}{dt}v$$

$$= -\int dt\; \underline{\underline{\frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}}}\;\ddot v\; v$$

Strahlungskraft

Strahlungskraft: $\vec{F} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \dddot{\vec{r}}_0$

Hier fällt weg, weil auf linke Seite steht die Leistg. der abgestrahlten Wellen → Verlust Leistg.

Einsetzen in Newtongleichung:

$$m \ddot{\vec{r}}_0 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \dddot{\vec{r}}_0 + \vec{F}_{ext}$$

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \underbrace{\frac{2}{3} \frac{q^2}{m 4\pi\varepsilon_0 c^3}}_{\tau_{rad}} \dddot{\vec{r}} + \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \tau_{rad} \dddot{\vec{r}}_0 + \frac{\vec{F}_{ext}}{m}$$

$\tau_{rad} = 10^{-24}$ s sehr klein

- Strahlungskorrekturen sind klein!
- aber physikalische Effekte sind beobachtbar
- wenn diese Gleichg. exakt gelöst werden soll, so muß $\ddot{\vec{r}}_0(t=0)$ als AB gegeben sein,

die hängt abs v. Kraft ab → schwierig

- einfache Lösg. Störungstheorie f.

harmonischen Oszillator: F_{ext}: harmonischer Oszillator

z.B. Elektron in Atom

$$\underbrace{\ddot{r}_0 + \omega_0^2 r_0}_{} = \tau_{rad}\,\dddot{r}_0$$

$\lambda = \pm i\omega_0$

aus $e^{\lambda t}$-Ansatz

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = \underbrace{\tau_{rad}\,\lambda^3}_{\text{Störung (klein)}}$$

1. Ordng.

$$\lambda^{(1)} = \pm i\omega_0$$

Lösg der λ-Gleichung: $\lambda = \sqrt{\tau_{rad}\lambda^3 - \omega_0^2}$

$$= i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^3\tau_{rad}}$$

soll τ_{rad} kleine Korrektur darstellen (1. Ordng. Taylor f. $\sqrt{\ }$)

$$\longrightarrow \quad \lambda \approx i\omega_0\left(1 - \frac{\lambda^3\tau_{rad}}{2\omega_0^2}\right)$$

Störungstheorie

einsetzen

$$\lambda^{(1)} = i\omega_0 - \omega_0^2 \tau_{rad} \frac{1}{2}$$

Lösg: $e^{i\omega_0 t - \omega_0^2 \tau_{rad} t \frac{1}{2}} \to e^{i\omega_0 t - \gamma_{rad} t}$

Es entsteht eine gedämpfte Oszillatorlösung, durch die E-Abstrahlg. über elektromagn. Welle.

Rate $\frac{\omega_0^2 \tau_{rad}}{2} = \gamma_{rad}$

$$\omega_0 = 10^{15} \frac{1}{s} \quad , \tau_{rad} \approx 10^{-24} s$$

$$\gamma_{rad} \sim 10^{6}/s$$

$$\gamma_{rad}^{-1} = 10^{-6} s$$

ist kein ganz schlechte Abschätzg. f. Spontan Emissions zeit

7. Makroskopische Maxwellgleichungen

7.1. Räumliche Mittelung

mikroskopische Adressierung von Punktladg. (Elektron, Kerne)
ist f. makroskop. Objekt nicht mgl. $\sim 10^{23}$ Teilchen

Idee: abstrahieren v. klein, atomaren Skala

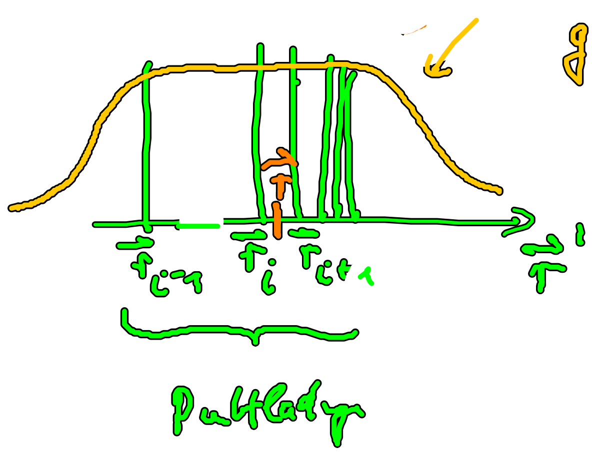
$$a_0 < \ell < \lambda$$

atomare Skala $0{,}5\,\text{Å}$ — mesoskopische Skala — Wellenlängen skala $500\,\mu m$

$\underbrace{}_{\text{loswerden}}$ $\underbrace{\phantom{\ell < \lambda}}_{\text{hier arbeiten: Optik?}}$

Meßgerät mitteln

↳ Hilfsfunktion



wird als gerade angenommen, nicht nötig i.a.

$$\rho(\vec r) \longrightarrow \rho(\vec r)_{\text{gemittelt}}$$

(a_0) (ℓ)

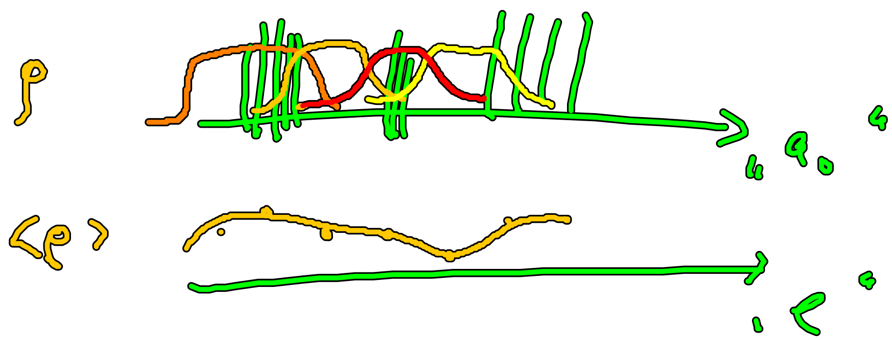
$$= \langle \rho \rangle$$

$$\langle \rho(\vec r)\rangle = \int d^3r' \, g(\vec r' - \vec r)\, \rho(\vec r')$$

$g(\vec r' - \vec r)$ ist um $\vec r$ lokalisiert

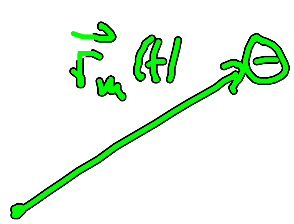
und „zählt" die Punktladungen im Mittelungsgebiet

→ damit erhält man Ladungsverteilung auf der mesoskopischen Skala.



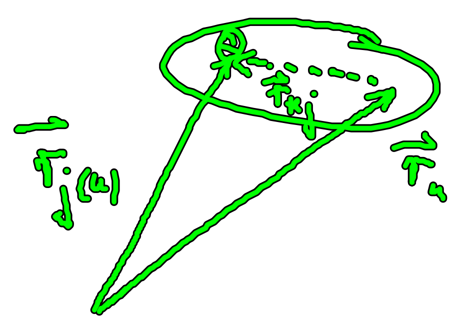
7.2. Makroskopische Ströme und Ladungen

frei bewegliche Ladungen



(Metallelektronen)

gebundene Ladungen



n-te Molekül

$\vec r_n$: Molekülschwerpunkt

j-tes Teilchen im n-ten Molekül

a) Mittelung der Ladungsdichte

$$\rho(\vec r) = \underset{\text{(frei)}}{\sum_n q_n\, \delta(\vec r - \vec r_n)} + \underset{\text{(Moleküle)}}{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}\, \delta(\vec r - \vec r_{j(n)})}$$

(i) freibewegl. Ladungen

$$\langle \rho(\vec r)\rangle_{\text{frei}} = \sum_m q_m\, g(\vec r - \vec r_m) \equiv \rho_m(\vec r)$$

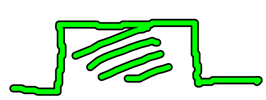
„verschmierte", makroskopische Dichte d. freien Ladungsträger

Bsp: homogen geladene Kugel:

$$\rho_m = \sum_m q_m\, g(\vec r - \vec r_m) = \underbrace{q\,\frac{N}{V}}_{\text{Ladungsdichte}}\, \theta(R_0 - |\vec r|)$$

$$q = q_m$$

R_0

$g \equiv$  $\equiv \dfrac{1}{V}$

l

N: Zahl LT in V

(ii) gebundene Ladungen

$|\vec r_{nj}| \ll |\vec r_n|$ siehe Skizze

Taylor

$$\langle \rho(\vec r)\rangle_{\text{gebunden}} = \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r'\, g(\vec r-\vec r')\, \delta(\vec r' - \vec r_n - \vec r_{nj})$$

$$= \underbrace{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}}_{\text{neutrales Molekül} \,\to\, \sum_{\text{Ladungen}} = 0} \int d^3r'\, g(\vec r - \vec r')\, \delta(\vec r' - \vec r_n) \qquad \text{1. Term}$$

$$+ \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \int d^3r'\, g(\vec r-\vec r')\left(-\vec r_{nj}\cdot \vec\nabla_{r'}\, \delta(\vec r' - \vec r_n)\right)$$

partielle Integration

$$= \underbrace{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}\, \vec r_{nj}}_{\text{Dipolmoment d. Moleküls } \vec d_n} \cdot \int d^3r'\, \vec\nabla_{r'}\, g(\vec r - \vec r')\, \delta(\vec r' - \vec r_n)$$

$$= \sum_n \vec d_n \cdot \vec\nabla_{r_n} g(\vec r - \vec r_n)$$

$$= -\sum_n \vec d_n \cdot \vec\nabla_r\, g(\vec r - \vec r_n)$$

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \underbrace{\sum_k \vec{d}_k \, g(\vec{r}-\vec{r}_k)}$$

$$= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}) \qquad \vec{P} \mathrel{\hat{=}} \text{makroskopische Dipoldichte}$$

Zusammenfassung zur gemittelten Ladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r}) - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\hat{Q}\right)$$

makroskopische Ladungsdichte — makroskopische Dipolladung — Quadrupolanteil (3. Term Taylor)