b) Mittlung der Stromdichte

freibeweglicher Anteil (i), gebundener Anteil (ii)

(Metallelektronen, Ionen in Lösung, etc) (Elektronen in atomaren Einheiten: Moleküle, Atome)

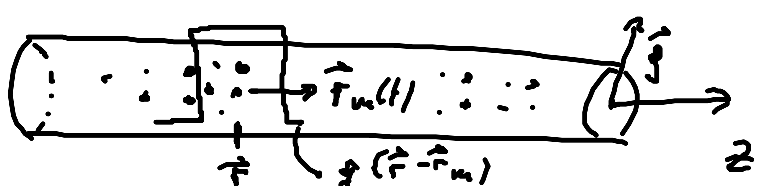
(i) freibewegliche Ladungen

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \sum_n q_n \, \dot{\vec{r}}_n(t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_n(t))$$

$$\langle \vec{j} \rangle_{\text{frei}} = \sum_n q_n \, \dot{\vec{r}}_n(t)\, g(\vec{r}-\vec{r}_n(t)) \equiv \vec{j}_m(\vec{r},t)$$

analog zur Behandlung der Ladungsdichte entsteht der „verschmierte" (g-Mittlung), makroskopische Strom

Beispiel: räumlich homogener Zylinderstrom
identische Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}_n(t) \equiv v\,\vec{e}_z$, v = konst



$$\vec{j}_m(\vec{r}) = v\,\vec{e}_z \sum_n q_n \, \underbrace{g(\vec{r}-\vec{r}_n)}$$

N: Teilchenzahl im Volumen V

$$\hat{=} \underbrace{\sum_{n,\ \text{um}\ \vec{r}}}$$

$$g \equiv \frac{1}{V} = \text{konst}$$

$$\vec j_m(\vec r) = v\,\vec e_z \cdot \underbrace{\frac{q\,N}{V}}_{\text{Ladungsdichte}}\, \theta(R_0 - |\vec\rho|)$$

(ii) gebundene Ladungen

$$\langle j(\vec r)\rangle_{\text{gebunden}} = \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)} \left(\cancel{\dot{\vec r}_n} + \dot{\vec r}_{nj}\right) \int d\vec r'\, g(\vec r - \vec r') \cdot \delta(\vec r' - \vec r_n - \vec r_{nj})$$

(analog $\langle \rho \rangle_{\text{gebunden}}$)

Position d. Moleküls (Moleküle sollen ruhen $\underline{\dot{\vec r}_n = 0}$)

(wieder klein)

$$= \underbrace{\underbrace{\sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}\, \dot{\vec r}_{nj}}_{\dot{\text{Dipol}}}\; g(\vec r - \vec r_n)}_{\sum_n \dot{\vec d}_n(t)\, g(\vec r - \vec r_n) \;=\; \frac{\partial}{\partial t} \vec P(\vec r, t)}$$

0.te Term Taylor in $\vec r_{nj}$.

$\sum_n \dot{\vec d}_n(t)\, g(\vec r - \vec r_n) = \frac{\partial}{\partial t} \vec P(\vec r, t)$ „Dipolstrom"

$$+ \sum_n \sum_{j(n)} q_{j(n)}\, \underbrace{\dot{\vec r}_{nj}\, \underbrace{\vec r_{nj} \cdot \vec\nabla_{r_n}}_{(\times\, \partial_x \cdots)}}\, g(\vec r - \vec r_n)$$

1. er Term Taylor in r_{nj}.

<u>Bemerkung</u>: Moleküle sind neutral.

$$\frac{1}{2}\partial_t\left(\vec r_{nj}\, \vec r_{nj} \cdot \vec\nabla_{r_n}\right) + \frac{1}{2}\dot{\vec r}_{nj}\, \vec r_{nj} \cdot \vec\nabla_{r_n} - \frac{1}{2} \vec r_{nj}\, \dot{\vec r}_{nj} \cdot \vec\nabla_{r_n}$$

Quadrupolanteil

„Quadrupolstrom"

(ab jetzt nicht weiter diskutieren, ist nicht zulässig, wenn $\vec{P} \neq 0$)

$$\vec{\nabla}_r \times \underbrace{(\vec{r}_{nj} \times \dot{\vec{r}}_{nj})}_{\text{drehimpulsartig}}$$

„magnetische Effekte"

insgesamt:

$$\langle \vec{j}(\vec{r},t) \rangle = \vec{j}_m(\vec{r},t) + \partial_t \vec{P}(\vec{r},t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r},t)$$

makroskop. Strom — Dipol-Strom — M: Magnetisierungsdichte

$$\vec{M} \equiv \sum_n \vec{\ell}_n \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\vec{\ell}_n = \frac{1}{2} \mu_0 \sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec{r}_{jn}(t) \times \dot{\vec{r}}_{jn}(t)$$

magnetische Momente $\sim$ Drehimpulse

(Bahnmagnetismus)

Analogie

$$\vec{P} = \sum_n \vec{d}_n \, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

$$\vec{d}_n = \sum_{j(n)} q_{j(n)} \vec{r}_{jn}$$

Dipoldichte wird durch Dipole der Moleküle bestimmt

Magnetisierungsdichte durch die magn. Momente (Drehimpulse) bestimmt.

Neben dem Bahnmagnetismus $\exists$ Spinmagnetismus.

7.2. Mittlg. der Maxwellgleichungen : makroskopische Maxwellgl.

$$\langle j \rangle = \vec{j}_m + \dot{\vec{P}} + \mu_0^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_m - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

partielle Int.

$$\underline{\underline{\partial_r}} \int d^3r' \, g(\vec{r} - \vec{r}') \, \partial_{r'} f(\vec{r}')$$

alle 4 Maxwellgl. mitteln : Mittlg. + Ableitg. vertauschen

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 \quad | \, \langle \, \rangle$ mitteln

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \langle \rho \rangle / \varepsilon_0$$

$$\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \cdot \langle \vec{E} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_m - \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \cdot \vec{P})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\langle \vec{E} \rangle + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_m$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \langle \vec{E} \rangle + \vec{P}) = \rho_m$$

$\vec D$ dielektrische Verschiebung

$$\vec D = \varepsilon_0 \langle \vec E \rangle + \vec P$$

$$\boxed{\vec\nabla \cdot \vec D = \rho_m}$$

Quelle des dielektrischen Verschiebungsfelds sind makroskopische Ladungen.

b/ $\vec\nabla \cdot \vec B = 0 \qquad \Big| \langle \;\rangle$

$$\vec\nabla \cdot \langle \vec B \rangle = 0$$

magnetisches Feld hat keine Quelle

c/ $\vec\nabla \times \vec E = -\partial_t \vec B \qquad \Big| \langle \;\rangle$

$$\vec\nabla \times \langle \vec E \rangle = -\partial_t \langle \vec B \rangle$$

Wirbel d. elektr. Felds
~ zeitliche Änderung d. B-Felds

d/ $\vec\nabla \times \vec B = \mu_0 \vec j + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec E \qquad \Big| \langle \;\rangle$

$$\underline{\vec\nabla \times} \langle \vec B \rangle = \mu_0 \left(\vec j_m + \partial_t \vec P + \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec\nabla \times \vec M} \right) + \frac{1}{c^2} \partial_t \langle \vec E \rangle$$

$c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$

$$\vec\nabla \times \underbrace{\left(\frac{\langle \vec B \rangle - \vec M}{\mu_0} \right)}_{\vec H} = \vec j_m + \partial_t \vec D$$

$\vec H$ magnetische Feldstärke

$$\mu_0 \vec{H} = \langle \vec{B} \rangle - \vec{M}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}}$$

Vorteile bei makroskop. Problem unter Verwend. $\vec{D}, \vec{H}$:

- $\rho_m = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$
- man kann Stetigkeitsbedingung an Medien formulieren

nächster Schritt: makroskopische Materialgleichungen!

$$j_m = j_m(E, B), \quad \vec{P} = \vec{P}(E, B) \ \ldots$$

$\longrightarrow$ selbstkonsistente Lsg. der Maxwellgleichungen.

8. Bewegungsgleichungen f. Strom, Dipoldichte

ausgehen v. Punktladungen

$$m \ddot{\vec{r}}_i = q\left(\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t)\right)$$

$i \rightarrow m, uj$

von Newtongleichg $\longrightarrow \vec{j}_m(\vec{E})$

$\left(\vec{r}_i(\vec{E}) \right)$

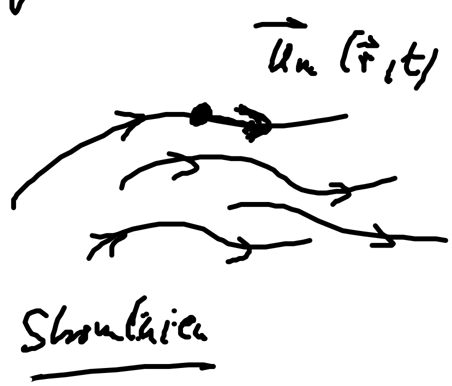
2 Grenzfälle: i: makroskop. Strom

ii: Dipoldichte

8.1. Makroskopische Ströme

- El. in Metallen, Plasma, ohmsch. Gesetz ...
- man geht zu Strömungsfeld über:

mittlere Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}_m(\vec{r},t)$, das die Bewegg. einer Probeladg. beschreibt



- Ansatz: $\vec{j}_m = \rho_m \vec{u}_m$ (alles von $\vec{r}, t$)

neue Größe eingeführt

Materialgleichungen d. Ladungsflüssigkeit:

1. Kontinuitätsgleichg. $\partial_t \rho_m = -\vec{\nabla}\cdot(\rho_m \vec{u}_m)$ $\qquad \vec{u}_m = ?$

2. Geschwindigkeitsfeldgleichung:

$$\partial_t \vec{u}_m + \vec{u}_m \cdot \vec{\nabla}\, \vec{u}_m = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{u}_m \times \vec{B} \right)$$

Lorentzkraftdichte

ist ein nichtlineares Gleichungssystem und muss i. a. mit Maxwellgl. gemeinsam gelöst werden

einfachste Anwendg. – ohmsches Gesetz

- Dämpfungsterm mit „Reibungsverlusten" (El-Phonon WW, El-El Stöße)

$$\dot{\vec{u}}_n \Big|_{Dämpf} = -\gamma \vec{u}_n$$

↑ Dämpfungsrate

- Klein Geschwindigkeiten $\vec{u}_n \cdot \nabla \vec{u}_n \to 0$
- homogen in Ort u. Zeit

$$\cancel{\partial_t \vec{u}_n} + \cancel{\vec{u}_n \cdot \nabla \vec{u}_n} = -\gamma \vec{u}_n + \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{u}_n \times \vec{B}\right)$$

$$\vec{u}_n = \frac{q}{m\gamma}\left(\vec{E} + \cancel{\vec{u}_n \times \vec{B}}\right)$$

langsam

$$\vec{j}_n = \underbrace{\frac{\rho_n q}{m\gamma}}_{\sigma} \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}$$

Leitfähigkeit

} einfachstes ohmsches Gesetz

Skizze Herleitg (Tutorium)

Kontinuitätsgl. $\rightarrow$ klar

Gleichung f. Geschwindigkeitsfeld koppelt an

Term wie kinetische Energie

$$\langle \dot{\vec{r}}_i \rangle \longrightarrow \langle \dot{\vec{r}}_j, \dot{\vec{r}}_i \rangle$$

$$\downarrow$$

$$\langle \vec{r}_w \vec{r}_j \vec{r}_k \rangle$$

es entsteht ein Hierarchieproblem

$$\underset{\text{Kollg.}}{\langle A B \rangle} \approx \langle A \rangle \langle B \rangle + \cancel{\text{Korrelk}}$$

8.2. Makroskopische Dipoldichte

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \sum_n \vec{d}_n(t)\, g(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

Bewegungsgleichg. f. Dipoldichte

$$\boxed{\text{Bewegungsgleichg.:}\quad \ddot{\vec{P}} + \omega_0^2 \vec{P} = -\gamma \dot{\vec{P}} + n_0 \frac{q^2}{m} \vec{E}}$$

γ – Dämpfg.

n_0 – Dipoldichte

ω_0^2 ~ rücktreibende Kraft im Molekül

$\vec{r}_{ij}$

gemäß Oszillatorgl.
+ Lorentzkraft

Oszillatormodell + Lorentzkraft (<u>Tutorium</u>)

<u>einfachste Anwendg.</u>: dielektrische Konstante im Medium

stationäre Lsg.: $$\boxed{\vec{P} = \frac{n_0 q^2}{m \omega_0^2} \vec{E}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

↑ phänomenologisch

$$= \underbrace{\left(\varepsilon_0 + \frac{n_0 q^2}{m \omega_0^2} \right)}_{\varepsilon_0 \varepsilon} \vec{E}$$