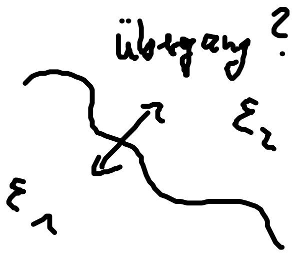
9. Grenzbedingungen f. makroskopische Feld und Randwertprobleme

makroskopische Maxwellgl. → kontinuierlich verteilte Materie,
z.B. mit verschieden dielektrischen Konstanten
(siehe letzte VL)



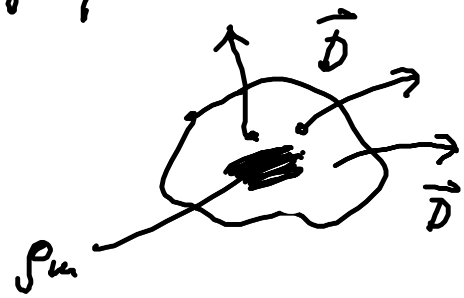
Wie verhalten sich Felder am Übergang / Grenze von Medien?

Kenntnisse können helfen bei Lösung v. Problemen, bei denen Felder „aneinander angepaßt" werden müssen.

9.1. Integraldarstellg. Maxwellgl. + Faradaygesetz

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_m$ über ein Volumen V integrieren, Oberfläche ∂V

Satz v. Gauß:



$$\boxed{\underbrace{\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{D}}_{\text{geschl. Oberflächenintegral über } \partial V} = \underbrace{Q_m}_{\text{Gesamtladg. im Volumen } V}}$$

$$\int_V dV \, \rho_m(\vec{r}) = Q_m$$

→ Nettofluß d. $\vec{D}$-Felds ergibt die eingeschlossene Gesamtladg.

b) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

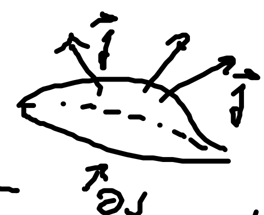
$$\boxed{\oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$$

→ Nettofluß d. $\vec{B}$-Felds ist Null (Kein magnet. Monopole)

c) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t \vec{D}$

über eine Fläche S mit einer Randkurve ∂S

anwenden des Satzes v. Stokes



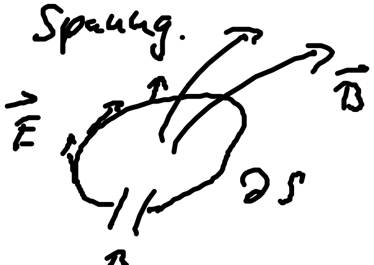
$$\boxed{\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{A} \cdot (\underbrace{\vec{j}_m + \partial_t \vec{D}}_{\vec{j}_{ges}}) = \underbrace{I}_{\text{Gesamtstrom d. Oberfläche}}}$$

Ampere-Maxwell-Gesetz:

→ Linienintegral ∂S über $\vec{H}$ ergibt d. Gesamtstrom I durch die Fläche S.

d) $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, analoge Rechg. zu (c)

$$\underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{E}}_{\text{verallgemeinerte Spannung}} \overset{\text{Lenz'sche Regel}}{=} - \underbrace{\int_S d\vec{A}\cdot\partial_t \vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{Spannung entsteht d. zeitlichen Veränderung d. Magnetfelds}} \underset{\text{Forderung } \partial S(t)}{=} -\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{S(t)} d\vec{A}\cdot\vec{B}}_{\phi_m \text{ magnet. Fluß}}$$



Spannung abgreifen (Leiterschleife)

„induzierte Spannung."

$$= -\frac{d}{dt}\int_{S(t)} d\vec{A}\cdot\vec{B}(\vec{r},t) + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{S(t)} d\vec{A}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{Korrektur zur zeitl. Variation d. Fläche}}$$

Wirkg. d. Zeitabhängigkeit

Mantelfläche

S(t) wird in dt bewegt

$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \underbrace{\int_S \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)}$$

→ Ändg. des Flusses durch die Flächenändg. $d\phi = \Delta\phi$

$\hat{=}$ Ändg durch Mantelfläche

$$d\vec{A} = \vec{v}\,dt \times d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{v}\times d\vec{r}$$

$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \oint \vec{v}\times d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})$$

$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \int d\vec{r}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)$$

$$\oint d\vec{r}\cdot\big(\underbrace{\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}}_{\vec{E}'}\big) = -\frac{d}{dt}\phi_m$$

$\vec{E}'$ im System der bewegt. Schleife

– Spanng kann durch zeitl. Ändg d. $\vec{B}$-Felds und die Leiterschleife jetzt ruht werden.

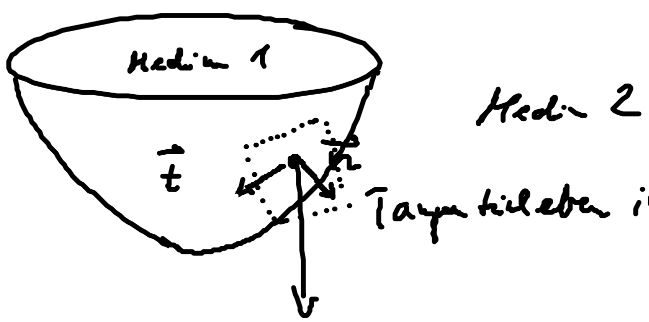
- Abh. bei Def. v. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ - Feldern,

die hängen v. Koordinatensystem ab!

(mit $\vec{v}$ bewegt oder nicht)

9.2. Grenzbedingungen / Stetigkeitsbeding.

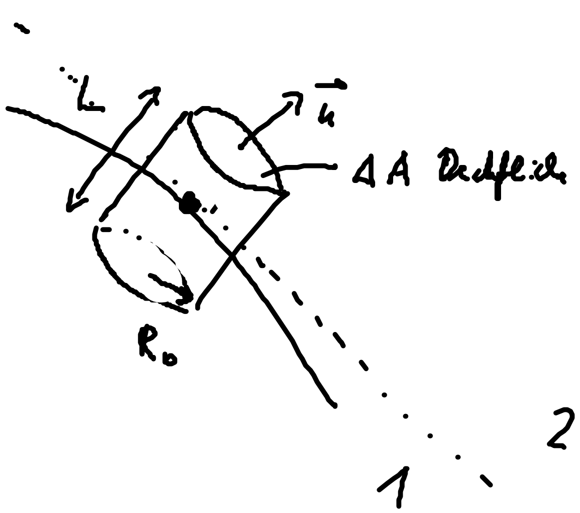
- um Lösungen von 2 verschied. Raumbereich aneinander anzupassen:



Feld wird zerlegt in 2 Anteile:

Einheitsvektor $\vec{t}$: in der Tangentialebene

Einheitsvektor $\vec{n}$: $\perp$ zur Tangentialebene



Gaußscher Satz / Integral

f. a) b)

a) $$\underbrace{\oint d\vec{A}\cdot\vec{D}(\vec{r})}_{\text{Hutschachtel}} = \int d^3r\,\rho_m(\vec{r})$$

$$\underbrace{2\pi R_0 L \bar{D}_t}_{\substack{\text{Mantelfläche}\\ \text{aus dem}\\ \text{Mittelwertsatz}\\ (\bar{D}_t)\\ \to\; f.\ L, R_0 \to 0 \\ =0}} + \underbrace{\left(\vec{D}_2\cdot\vec{n} - \vec{D}_1\cdot\vec{n}\right)\Delta A}_{\substack{\text{Deckflächen d.}\\ \text{Hutschachtel}}} = \underbrace{\underbrace{\Delta A\cdot L}_{\text{Volu}}\,\bar{\rho}}_{\substack{\bar{\rho}\text{ aus Mittelwertsatz}\\ \text{wenn } \rho \text{ endlich, damit}\\ \text{überall anwendbar}\\ \to 0}}$$

$\Delta A = \pi R_0^2$

$$\Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = 0$$

Die Normalkomponente d. $\vec{D}$-Felds ist stetig.

$$D_1^n - D_2^n = 0$$

$$\boxed{D_1^n = D_2^n}$$

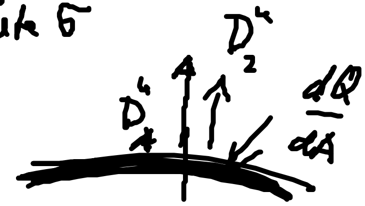
$\Delta Q = \int dV \rho_m(\vec{r})$ wenn $L \to 0$

wenn $\rho_m(\vec{r})|_L$ "aus Versehen" und ∞ wird (ideale Metalle)

$\neq 0$ Mittelwertsatz nicht anwendbar

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n}\;\Delta A = \frac{\Delta Q}{\Delta A}\,\Delta A$$

$$= \frac{dQ}{dA} \;\hat{=}\; \text{Flächen-ladungs-dichte } \sigma$$



$$\boxed{\left(D_1^n - D_2^n\right) = \sigma}$$

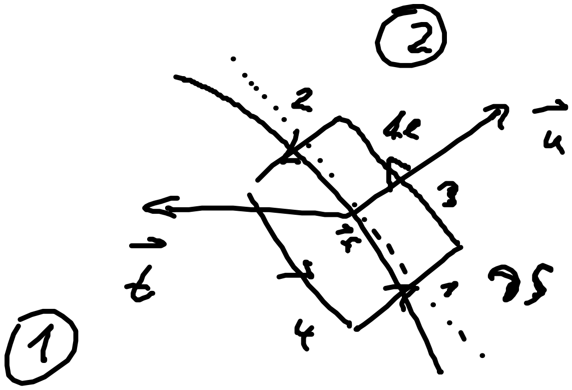
Die Normalkomponente d. D-Felds springt um die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$, wenn $\rho_L(\vec{r}) \to \infty$ an der OF geht.

b) Magnetfeld: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\boxed{B_1^n - B_2^n = 0}$$

Die Normalkomponente d. B-Feld ist beim Übergang zwischen 2 Medien stetig.

c) $\oint_{\partial S} d\vec r \cdot \vec E(\vec r) = -\int_S d\vec A \cdot \partial_t \vec B$



geschlossenes Linienintegral um → Schleife

Wenn der Weg um den Punkt $\vec r$ zusammengezogen wird so: – verschwindet die rechte Seite nach MWS

$$\underbrace{0}_{\text{Weg 1+2 nach Mittelwertsatz}} + \underbrace{\underbrace{\overbrace{\Delta l\,(\vec t\times\vec u)}^{d\vec r}\cdot\vec E_2}_{3}}_{\text{Weg}(3+4)} - \underbrace{\Delta l\,(\vec t\times\vec u)\cdot\vec E_1}_{4} = 0$$

$$\therefore\ \Delta l\ \vec t\cdot\left(\underbrace{\vec u\times(\vec E_2-\vec E_1)}\right) = 0$$

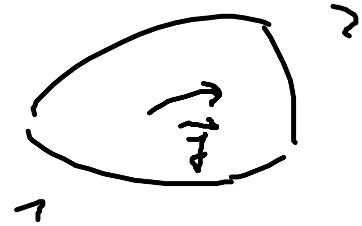
$$\boxed{\vec u\times(\vec E_2-\vec E_1) = 0}$$

$$\vec u\times\vec E_1 = \vec u\times\vec E_2$$

$$\boxed{E_1^t = E_2^t}$$

Die Tangentialkomponente d. E-Felds ist stetig.

d) $$\oint d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{A} \cdot \vec{j}$$



analog

$$\underbrace{\Delta l\,(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \vec{H}_2 - \Delta l\,(\vec{t} \times \vec{n}) \cdot \vec{H}_1}_{} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \vec{j} \text{ endlich} \\ \Delta l \underbrace{\frac{\Delta I}{\Delta l}}_{\text{Linienstromdichte}} & \text{wenn } \vec{j} \text{ unendlich} \end{cases}$$

wenn keine ∞ Stromdichten in der Oberfläche S (Δl) auftreten, so ist die Tangentialkomponente d. H-Felds stetig:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2$$

$$\boxed{H_1^t = H_2^t}$$

Wenn $\vec{j}$ u.U. ∞ wird so gilt MWS nicht und es muß ein Linienstromdichte $\vec{K}$

eingeführt werden

$$\boxed{\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{K}}$$

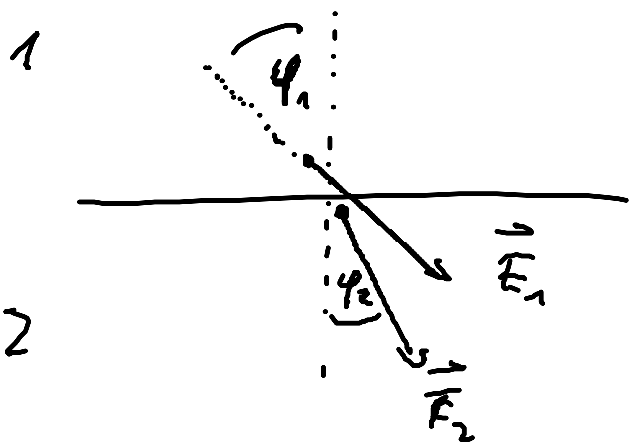
$\vec{H}_t$ springt um die Linienstromdichte $\vec{K}$.

9.3. Beispiel

$i = 1,2$

$D_i = \varepsilon_i E_i$

einfaches Modell, 2 Halbräume, Dielektrika



$$D^{n_1} = D^{n_2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\varphi_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\varphi_2$$

$$E^{t_1} = E^{t_2} \Rightarrow \underbrace{E_1 \sin\varphi_1 = E_2 \sin\varphi_2}$$

$$\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Kleine Winkel

$$\varphi_1 = \varphi_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

beim Übergang v. dicht zu dünn Medium

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ wird zum Lot hin gebrochen