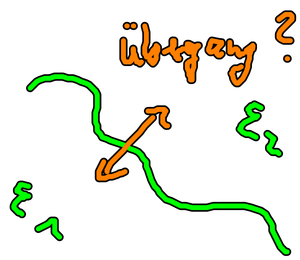
9. Grenzbedingungen f. makroskopische Feld und Randwertprobleme

makroskopische Maxwellgl. → kontinuierlich verteilte Materie, z.B. mit verschieden dielektrischen Konstanten (siehe letzte VL)

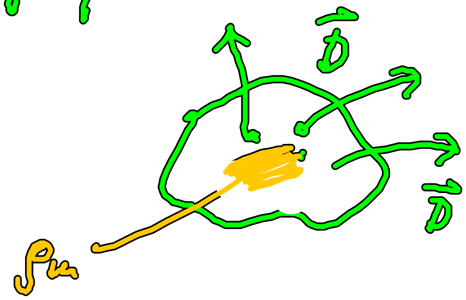


Wie verhalten sich Felder am Übergang / Grenze von Medien?
Kenntnisse können helfen bei Lösung v. Problemen, bei denen Felder „aneinander angepaßt" werden müssen.

9.1. Integraldarstellg. Maxwellgl. + Faradaygesetz

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_m$ über ein Volumen V integrieren, Oberfläche ∂V

Satz v. Gauß:



$$\boxed{\underbrace{\oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{D}}_{\text{geschl. Oberflächenintegral über } \partial V} = \underbrace{Q_m}_{\text{Gesamtladg. im Volumen } V}}$$

$\int dV\, \rho_m(\vec{r}) = Q_m$ ✓

→ Nettofluß d. $\vec{D}$-Feldes ergibt die eingeschlossene Gesamtladg.

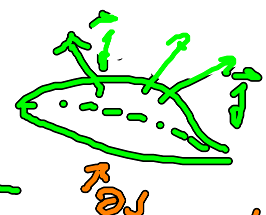
b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\boxed{\oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\vec{B} = 0}$$

→ Nettofluß d. $\vec{B}$-Feldes ist Null (kein magnet. Monopole)

c) $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j}_m + \partial_t\vec{D}$

über eine Fläche S und eine Randkurve ∂S anwenden des Satzes v. Stokes



$$\boxed{\oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{H} = \int_S d\vec{A}\cdot(\underbrace{\vec{j}_m + \partial_t\vec{D}}_{\vec{j}_{ges}}) = \underbrace{I}_{\text{Gesamtstrom d. Oberfläche}}}$$

Ampere-Maxwell Gesetz:

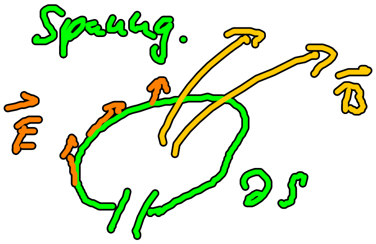
→ Linienintegral ∂S über $\vec{H}$ ergibt den Gesamtstrom I durch die Fläche S.

d) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$, analoge Rechng. zu (c)

$$\underbrace{\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{E}}_{\text{verallgemeinerte Spannung.}} = - \underbrace{\int_S d\vec{A} \cdot \partial_t \vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{Spannung entsteht d. zeitlichen Veränderung d. Magnetfelds.}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}}_{\phi_m \text{ magnet. Fluß}}$$

Lenzsche Regel

Tardag $\partial S(t)$

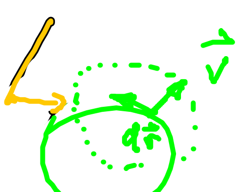


Spanng. abgreifen
(Leiterschleife)

„induzierte Spanung."

$$= -\frac{d}{dt} \int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r},t) + \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{S(t)} d\vec{A} \cdot \vec{B}(\vec{r},t)}_{\text{Korrektur zur zeitl. Variation d. Fläche}}$$

Wirkg. d. Zeitabhängig.



S(t) wird in dt bewegt

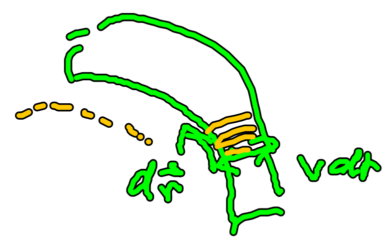
$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \underbrace{\frac{d}{dt}\int_S \frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)}$$

Änd. des Flusses durch die Flächenänd. $d\phi = \Delta t$

≙ Änd. durch Mantelfläche

$$d\vec{A} = \vec{v}\,dt \times d\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{v}\times d\vec{r}$$



$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \oint \vec{v}\times d\vec{r}\cdot\vec{B}(\vec{r})$$

$$= -\frac{d}{dt}\phi_m + \int d\vec{r}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)$$

$$\oint d\vec{r}\cdot\underbrace{\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)}_{\vec{E}'} = -\frac{d}{dt}\phi_m$$

$\vec{E}'$ im System der bewegl. Schleife

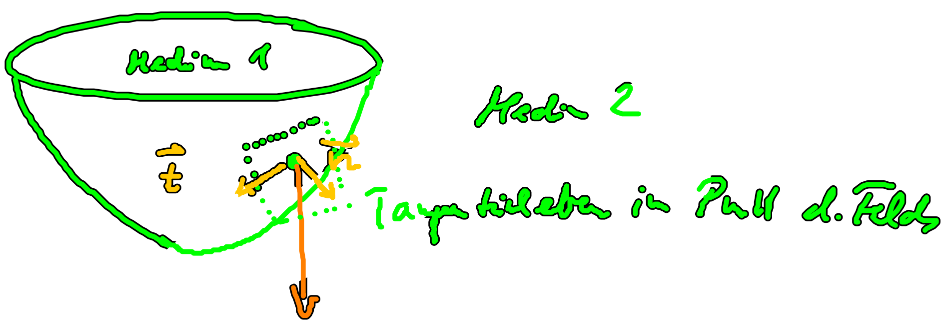
– Spannung kann durch zeitl. Änd. d. $\vec{B}$-Feldes und die Leiterschleife jetzt rotiert werden.

– Abh. bei Def. v. $\vec{E}$ und $\vec{B}$ – Feldern, die hängen v. Koordinatensystem ab!

(mit $\vec{v}$ bewegt oder nicht)

9.2. Grenzbedingungen / Stetigkeitsbedingung.

– um Lösungen von 2 verschied. Raumbereich aneinander anzupassen:

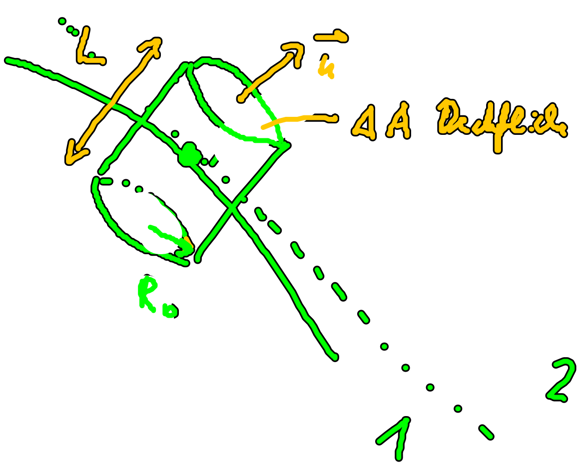


Feld wird zerlegt in 2 Anteile:

Einheitsvektor $\vec{t}$: in der Tangentialebene

Einheitsvektor $\vec{n}$: $\perp$ zur Tangentialebene

–



Hüllenflächenintegral

f. a) b)

a) $$\oint\limits_{\text{Hutschachtel}} d\vec{A} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \int d^3r \, \rho_m(\vec{r})$$

$$2\pi R_0 L \bar{D}_t + \left(\vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n}\right) \Delta A = \underbrace{\Delta A \cdot L}_{\text{Vol.}} \bar{\rho}$$

Mantelfläche aus dem Mittelwertsatz ($\bar{D}_t$)

Deckfläche d. Hutschachtel

$= $ f. $L, R_0 \to 0$

$\underbrace{\phantom{2\pi R_0 L \bar{D}_t}}_{=0}$

$\Delta A = \pi R_0^2$

$\underbrace{\bar{\rho} \text{ aus Mittelwertsatz bei } \rho \text{ endlich, d.h. nicht unendlich}}_{\to 0}$

$$\Rightarrow \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = 0$$

Die Normalkomponente d. $\vec{D}$-Felds ist stetig.

$$D_1^n - D_2^n = 0$$

$$\boxed{D_1^n = D_2^n}$$

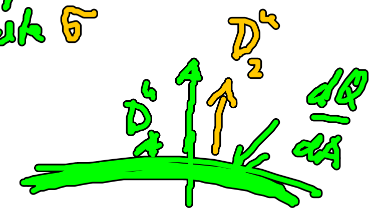
$\Delta Q = \int dV \rho_m(\vec{r})$ wenn $L \to 0$

wenn $\rho_m(\vec{r})|_L$ am Kästchen^n und ∞ wird (ideale Metalle)

$\neq 0$ Mittelwertsatz nicht anwendbar

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n}\;\Delta A = \frac{\Delta Q}{\Delta A}\,\Delta A'$$

$$= \frac{dQ}{dA} \;\hat{=}\; \text{Flächen-ladungs-dichte } \sigma$$



$$\boxed{(D_1^n - D_2^n) = \sigma}$$

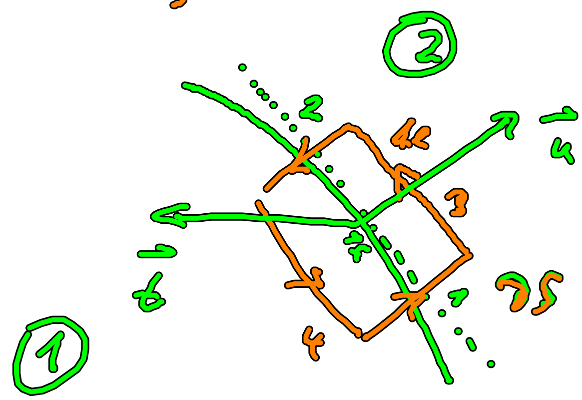
Die Normalkomponente d. D-Felds springt um die Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$, wenn $\rho_n(\vec{r}) \to \infty$ an der OF geht.

b) Magnetfeld: $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\boxed{B_1^n - B_2^n = 0}$$

Die Normalkomponente d. B-Feld ist bei Übergang zwischen 2 Medien stetig.

c) $\oint_{\partial S} d\vec r \cdot \vec E(\vec r) = - \int_S d\vec A \cdot \partial_t \vec B$



geschlossenes Linienintegral um → Schleife

Wenn der Weg um den Punkt $\vec r$ zusammengezogen wird so: – verschwindet die rechte Seite nach MWS

$$\underbrace{0}_{\text{Weg 1+2 nach Mittelwertsatz}} + \underbrace{\overbrace{\Delta l \,(\vec t \times \vec n)}^{d\vec r} \cdot \vec E_2}_{3} - \underbrace{\Delta l\,(\vec t \times \vec n) \cdot \vec E_1}_{4} = 0$$

Weg (3+4)

$$\therefore \Delta l \; \vec t \cdot \left(\vec n \times \underbrace{(\vec E_2 - \vec E_1)}\right) = 0$$

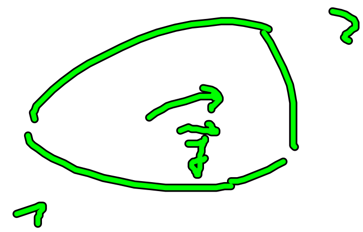
$$\boxed{\vec n \times (\vec E_2 - \vec E_1) = 0}$$

$$\vec n \times \vec E_1 = \vec n \times \vec E_2$$

$$\boxed{E_1^t = E_2^t}$$

Die Tangentialkomponente d. E-Felds ist stetig.

d) $\oint d\vec{r} \cdot \vec{H} = \int_S d\vec{A} \cdot \vec{J}$



analog

$$\Delta l \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \cdot \vec{H}_2 - \Delta l \left(\vec{t} \times \vec{n}\right) \cdot \vec{H}_1 = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \vec{J} \text{ endlich} \\ \Delta l \underbrace{\frac{\Delta I}{\Delta l}}_{\text{Linienstromdichte}} & \text{wenn } \vec{J} \text{ unendlich} \end{cases}$$

wenn keine ∞ Stromdichten in der Oberfläche S Δl auftreten, so gilt

die Tangentialkomponente d. H-Felds stetig:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = 0$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2$$

$$\boxed{H_1^t = H_2^t}$$

Wenn J u.U. ∞ wird so gilt MWS nicht

und es muß ein Linienstromdichte $\vec{K}$

eingeführt werden

$$\boxed{\vec{u} \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{K}}$$

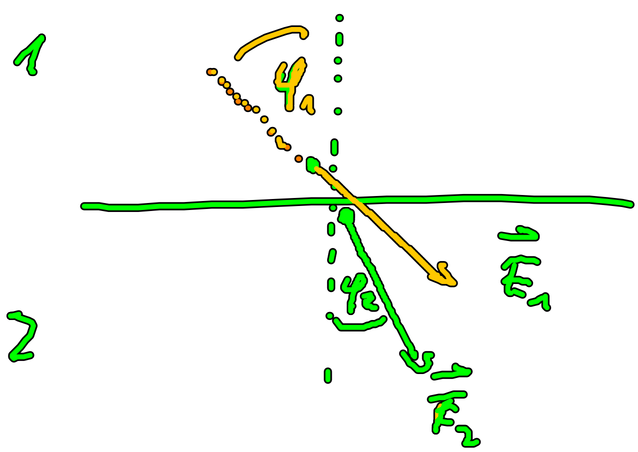
$\vec{H}_t$ springt um diese Linie schon direkt $\vec{K}$.

$i = 1, 2$

9.3. Beispiel

$D_i = \varepsilon_i E_i$

einfaches Modell, 2 Halbräume, Dielektrika



$D^{n_1} = D^{n_2} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\varphi_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\varphi_2$

$$\underbrace{E^{t_1} = E^{t_2} \Rightarrow E_1 \sin\varphi_1 = E_2 \sin\varphi_2}$$

$$\frac{\tan\varphi_1}{\tan\varphi_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Klein Winkel

$$\varphi_1 = \varphi_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

beim Übergang v. dicht zu dünn Medium

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ wird <u>zum</u> Lot hin gebrochen