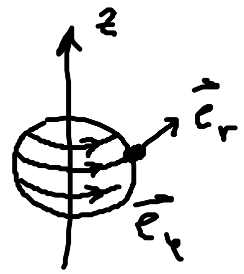
Beispiel f. Oberflächenstrom: (zu 9.3)



Oberflächenstrom auf Kugeloberfläche

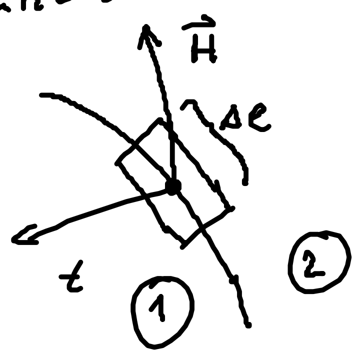
z.B. Strom durch flossene Drähte

$\vec e_r, \vec e_\vartheta, \vec e_\varphi$ ≙ Rechtssystem

$\vec k = k(\vartheta, \varphi)\, \vec e_\varphi$

Normalenvektor: eindeutig wie das zu legen ist

Tangentialvektor d. Felds nochmal diskutieren



$\Delta l\, \vec t \cdot (\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1)) = I$ (Strom durch die kleine Fläche)

↗ tangential an Oberfläche
zunächst beliebiger Tangentialvektor

$$\vec t \cdot (\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1)) = \frac{I}{\Delta l}\, \vec t \cdot \vec t$$

f. beliebiges $\vec t$ →

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \frac{I}{\Delta\ell}\,\vec{t} \equiv \vec{k}$$ Oberflächenstromdichte

(Liniestromdichte)

↪ weil $\frac{1}{m}$ statt $\frac{1}{m^2}$ Einheit

$$\vec{H} = \vec{n}\,\underbrace{\vec{H}\cdot\vec{n}}_{\vec{n}\,H_n} + \underbrace{(\vec{H} - \vec{n}\;\vec{n}\cdot\vec{H})}_{\vec{H}_t\,=\,?}$$

Normalvektor $\vec{H}$ Tangentialvektor v. $\vec{H}$

$$= \vec{n}\,H_n + \underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{n} - \vec{n}\,\vec{n}\cdot)\,\vec{H}}$$

$$= \vec{n}\,H_n \qquad - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H})$$

Einteilung in Normale u. Tangentiale gewonnen

$$\hat{\ } \;\to\; -\vec{n} \times \left(\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\right) = \vec{n} \times \vec{k}$$

$$\boxed{(\vec{H}_t^1 - \vec{H}_t^2) = \vec{n} \times \vec{k}}$$

am Bsp: $\vec{n} \times \vec{k} = \vec{e}_r \times k(\vartheta, \varphi)\,\vec{e}_\varphi$

$$= \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi\; k(\vartheta, \varphi)$$

$$= -\vec{e}_\vartheta\; k(\vartheta, \varphi)$$

Tangentialkomponente zeigt in $\vec{e}_\vartheta$ − Richtg.

9.4. Materialtheorie f. Statik $\omega \to 0$, statische Maxwellgl.

um Stetigkeitsbedingung anzuwenden muß man Materialgl.

lesen: $D = D(E)$, $H = H(\vec{B})$

$$\underbrace{D_n\ ,\ E_t}_{}$$

muß einheitlich formuliert werden
über Materialgleichungen

9.4.1. Dielektrika

$$\ddot{\vec{P}} + \omega_0^2 \vec{P} + \gamma \dot{\vec{P}} = \frac{q^2 n_0}{m} \vec{E}$$

oszillierende Dipoldichte $\vec{P}$ (n_0 : Dipoldichte)
angetrieben d. $\vec{E}$-Feld

statisch: $\vec{P} = \dfrac{q^2 n_0}{m \omega_0^2} \vec{E}$

$$\vec{P} = \underbrace{\vec{P}_0}_{\text{permanente Dipole}} + \underbrace{\frac{q^2 n_0}{\omega_0^2 m} \vec{E}}_{\text{induzierte Dipole}} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0 \chi_d \vec{E}$$

(Orientierungspolarisation)

Ferroelektrika

$$\chi_d = \frac{q^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega_0^2 m}$$

Suszeptibilität (wie stark polarisierbar)

häufigster Fall $\vec{P}_0 = 0$:

$$\vec D \equiv \varepsilon_0 \vec E + \vec P = \varepsilon_0 \vec E + \varepsilon_0 \chi_d \vec E \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \vec E$$

kann auch Tensor sein (anisotrope Medien)

$$\varepsilon = (1 + \chi_d) > 1$$

im Allgemeinen

$$\boxed{\text{Materialgleichung } D = D(E) : \vec D = \varepsilon_0 \varepsilon \vec E} \quad \chi_d = \chi_d(\vec r)$$

Lösung in d. Bereichen 1+2, wo ε_1, ε_2 verschieden:

$$\vec\nabla \cdot \vec D = 0 = \varepsilon_0 \vec\nabla \cdot \left(\varepsilon(\vec r) \vec E(\vec r) \right)$$

Dielektrikum

$$\boxed{\vec\nabla \cdot \left(\varepsilon(\vec r) \vec E(\vec r) \right) = 0}$$

Feldgleichg. f. elektrostatischen Fall

f. stückweise konstante ε wird's einfacher:

f. i-tes Gebiet: $\vec\nabla \cdot \vec E_i = 0$

$\vec\nabla \times \vec E_i = 0 \rightarrow \vec E_i = -\vec\nabla \phi_i$

$\Delta \phi_i = 0$ Laplace gleichg. f. i-te Gebiet

alternativ : $$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi \right) = 0}$$

§4.2. Magnetika (magnet. Stoffe)

$\vec{M}$ Magnetisierungsdichte

analog zu $\vec{P}$:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

Permanentmagnete

magnetische Suszeptibilität

Materialgleichg.: $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ gesucht

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} - \vec{M} \right)$$

$$\leadsto \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \underbrace{\vec{M}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}}_{\text{kompliziertes Zusammenspiel}}$$

$$\stackrel{!}{=} \mu_0 \mu \vec{H}$$

f. jeden Stoff konstant ansehen

i.a. $\mu = \mu(\vec{H})$

$\rightarrow$

(i) Permanentmagnete: $M_0 \neq 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{H} + \vec{M}_0)$$

$$\Downarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_0}{\mu_0} = - \frac{\rho_{magn.}}{\mu_0} \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \equiv \rho_{magn.}$$

↗ Dipoldichte

im Außenraum d. Permanentmagnete

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \; , \; \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{H} = - \vec{\nabla} \phi_M$$

↖ magnet. Potential

$$\boxed{\Delta \phi_M = 0}$$ Laplacegleichung!

(ii) Dia / Paramagnete $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \mu(\vec{r}) \vec{H}(\vec{r}))$$

analog zu $\vec{E}, \vec{D}$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\mu(\vec{r}) \vec{\nabla} \phi_M) = 0}$$

oder stückweise konstant

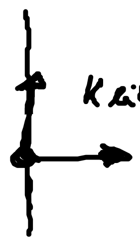
$$\Delta \phi_M^i = 0 \quad \text{f. } i\text{-tes Gebiet}$$

9.4.3. Ideale Metalle

$\vec{j}_m$, ρ_m mikroskop. Ströme, Ladungen $\exists$

Statik: Keine Zeitabhängigkeit

Metall
feldfrei
$\vec{E} = 0$



Keine Kraft darf wirken $\vec{E}_t \overset{!}{=} 0$

$\vec{E}_n \neq 0$

$$\underbrace{\vec{j}}_{\text{muß Null sein (Statik)}} = \sigma \cdot \vec{E} \qquad \text{ideal } \sigma \to \infty \text{ (Leitfähigkeit)}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \to 0$$

Sowohl innen als auch außen gilt die Laplacegleichung.

$$\Delta\phi = 0$$

9.5. Lösung der Laplacegleichung d. orthogonale Funktionen

$\Delta\phi = 0$ $\quad$ ϕ gesucht als allg. Lösung.

Konkrete Lsg. wird durch Randbedingungen festgelegt

jede Lsg. $\phi(\vec{r}) = \sum_n a_n f_n(\vec{r})$

$\{ f_n(\vec{r}) \}$ Funktionensystem
(vollständig, orthogonalisiert)

$$a_n = \int d^3r \, f_n^*(\vec{r}) \, \phi(\vec{r})$$

geometrieangepasstes Funktionensystem finden:

z.B. $\{ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \}$, $\{$Polynom$\}$, $\{$Kugelfunktion$\}$

$\Delta\phi$ kann durch Separation gelöst werden und zerfällt dann in Eigenwertprobleme.

z.B. Kugelkoordinaten:

$$\phi = \underbrace{\frac{u(\vec{r})}{r} P(\vartheta) \, Q(\varphi)}_{\text{jeweils 1 Eigenwertproblem}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left(a_{lm} r^l + b_{lm} r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

a_{lm}, b_{lm} : Entwicklungskoeffizienten

m, l : analog. d. Quantenzahlen im H-Atom

für zylindersymmetrisches Problem $(m = 0)$

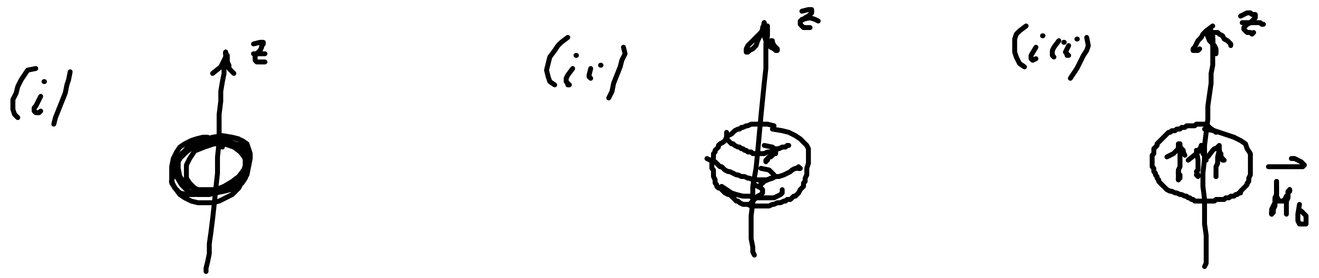
$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l \, r^{l} + b_l \, r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\vartheta)$$

Koeffizienten, zu bestimmen aus Randbedingungen

Legendrepolynome

<u>Beispiel</u>: strombelegte Kugel – 3 auf einen Streich

$$\vec{K} = K(\vartheta)\, \vec{e}_\varphi$$



(i) rotierende Kugel mit OF-Ladungsdichte

(ii) ruhende Kugel mit Strom durchflossenen Drähten

(iii) homogen magnetisierte Kugel $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{M}_0$

allg. Ansatz f. innen / außen

$$\phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} \left(a_l \, r^{l} + b_l \, r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos\vartheta)$$

<u>innen</u>: $$\phi_M = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \, r^{l} \, P_l(\cos\vartheta)$$

$b_l = 0$, $\frac{1}{r^{l+1}} \to \infty$ bei $r = 0$: unphysikalisch außen: $\phi_A = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \, r^{-(l+1)} \, P_l(\cos\vartheta)$

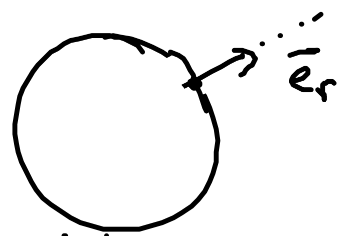
$a_l = 0$, $r^l \to \infty$ bei $r \to \infty$: unphysikalisch

a_l, b_l die restlichen über RB bestimmen:

(i) Normale v. $\vec{B}$:

$$B_1^{\perp} = B_2^{\perp} \Big|_{r=R}$$

R: Kugelradius



$$\partial_r \phi_1 = \partial_r \phi_2$$

(Kugelkoord., Gradient in Kugelkoord.)

$$\sum_{l=0} \underbrace{\left(a_l \, l \, r^{l-1} + (l+1) b_l \, r^{-(l+2)} \right)}_{=0} P_l(\cos\vartheta) \overset{!}{=} 0 \Big|_{r=R}$$

linear unabhängig

$$\frac{a_l}{b_l} = -\frac{(l+1)}{l} R^{\underbrace{-(l+2)-(l-1)}_{\to -(2l+1)}}$$

z.B. $l=1$: $\frac{a_1}{b_1} = -2R^{-3}$, $a_1 = -2R^{-3} b_1$

(ii) Tangentialkomponente: $\vec{H}_2^t - \vec{H}_1^t = K(\vartheta)\,\vec{e_\vartheta}$

$\hookleftarrow K(\vartheta) = K_0 \sin\vartheta$

wieder Gradientenoperator in Kugelkoordinaten

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_1}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} \right) = K_0 \sin\vartheta \Big|_{r=R}$$

$$\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} \left(b_l r^{-(l+1)} - a_l r^l \right) P_l^1(\cos\vartheta) = K_0 \sin\vartheta \Big|_{r=R}$$

$$-P_1^1 =$$

Koeffizientenvgl. f. P_l's:

$$\left(b_1 \frac{1}{R^3} - a_1 \right) = K_0$$

$\longrightarrow$ 2 Gleichungen f. a_1, b_1

$$b_1 = \frac{K_0 R^3}{3}, \quad a_1 = -\frac{2}{3} K_0$$

a_l, b_l f. $l \neq 1$ wählen wir Null

$$\phi_1 = -\frac{2}{3} K_0\, r \cos\vartheta \quad : \text{Innen: linear in } r$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3} K_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\vartheta \quad : \text{Außen} \;\hat{=}\; \text{Dipol}$$

wenn die 2 Terme aus der Reihe ϕ_{in} ausgewertet werden

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}\phi_M$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2}{3}\kappa_0 \left(\cos\vartheta\,\vec{e_r} - \sin\vartheta\,\vec{e_\vartheta}\right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{3}\kappa_0 R^3 \left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{\sin\vartheta}{r^3}\vec{e_\vartheta}\right)$$