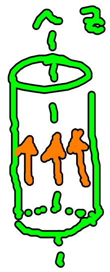
9.6. Direkte Lösung der Poissongleichung: Statik

Beispiel:



Draht: ∞ ausgedehnt

Radius R

Strom: an allen Stellen homogen verteilt

$\rightarrow$ statisches Problem: Zeitableitung $\rightarrow 0$

$\rightarrow$ ungekoppelte elektrische u. magnetische Felder

a/ elektrisches Feld:

Ladungsdichte = konstant

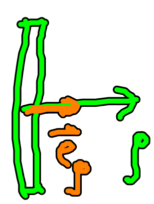
$$\Delta \phi = -\frac{\rho_z}{\varepsilon_0}$$

Zylindersymmetrie,

kann keine z, φ Abhängigkeit

Δ – Laplace in Zylinderkoordinaten, ρ – Abhängigkeit

$$\frac{1}{\rho}\,\partial_\rho\left(\rho\,\partial_\rho \phi\right) = -\frac{\rho_z}{\varepsilon_0}$$



außen: $\rho_z = 0 \qquad \partial_\rho\left(\rho\,\partial_\rho \phi\right) = 0$

$\rho\, \partial_\rho \phi = \text{konstant} = a$

$\underline{\underline{\partial_\rho \phi = \frac{a}{\rho}}} \rightarrow \vec{E}^a = E_\rho^a \vec{e}_\rho = -\frac{a}{\rho}\vec{e}_\rho$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

$(E_\rho = -\partial_\rho \phi)$

<u>innen</u>: $\rho_t \neq 0$ $\quad \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\, \partial_\rho \phi) = -\frac{\rho_t}{\varepsilon_0}$ ← konstant

$\partial_\rho(\rho\, \partial_\rho \phi) = -\frac{\rho_t \rho}{\varepsilon_0}$

$\rho\, \partial_\rho \phi = -\frac{\rho_t \rho^2}{2\varepsilon_0} + b$

↑ konstante v. unbestimmtem Integral

$\partial_\rho \phi = -\frac{\rho_t \rho}{2\varepsilon_0} + \frac{b}{\rho}$ → $b = 0$ setzen um sicherzustellen daß Feld bei $\rho = 0$ endlich bleibt

$\vec{E}^i = E_\rho^i \vec{e}_\rho = \frac{\rho_t}{2\varepsilon_0}\rho\, \vec{e}_\rho$

a: offene Konstante, wird gewählt um beide Lsg. aneinander anzupassen. (Normalkomponenten)

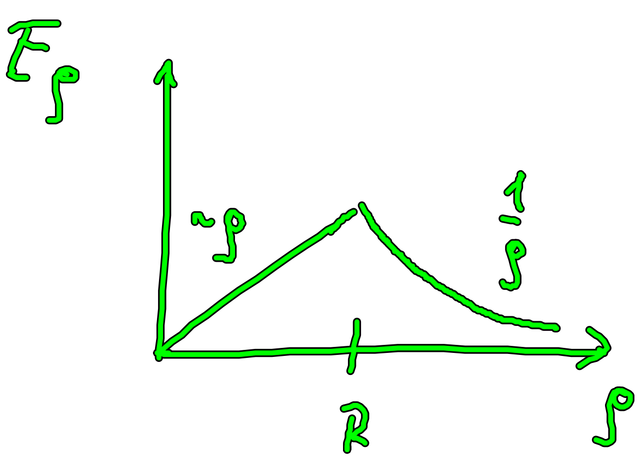
$$\vec{D}_n^{\,i} = \vec{D}_n^{\,a} \Big|_{\rho = R} \qquad \varepsilon = 1 \text{ überall}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_n^{\,i} = \vec{E}_n^{\,a} \Big|_{\rho = R}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_z}{2\varepsilon_0} R = -\frac{a}{R}$$

$$a = -\frac{R^2 \rho_z}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_a = \frac{R^2 \rho_z}{2\varepsilon_0} \frac{\vec{e}_\rho}{\rho}, \qquad \vec{E}_i = \frac{\rho_z}{2\varepsilon_0} \rho \, \vec{e}_\rho$$



innen: linearer Anstieg

außen: Abfall mit $1/\rho$

kann gewählt werden um mit Objekten über RB anzupassen.

$$\varphi = \varphi_{\text{inhom}} + \varphi_{\text{hom}}$$

(spezielle) (allgemeine)

6) Magnetfeld

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} = -\mu_0 j_z \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$$

$$\Delta A_z = -\mu_0 j_z$$

aus Symmetriegründen: $A_z = A_z(\rho)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \partial_\rho \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = -\mu_0 j_z$$

analog zu ϕ-Gleichung: analoge Lösung

Beachte: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times (A_z \vec{e}_z) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi$

$$B_\varphi^a = -\frac{a}{\rho}, \quad B_\varphi^i = \frac{\mu_0}{2} j_z \rho$$

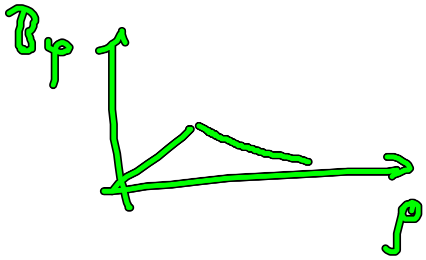
anpassen über Stetigkeit d. H-Komponente (H_t) $\mu = 1$

$\rightarrow$ Stetigkeit B-Komponente

j_z

$$\Rightarrow \quad B_\varphi^a = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2}{\rho}\, j_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2}{\rho}\frac{I}{\pi R^2} = \frac{I}{2\pi}\frac{\mu_0}{\rho}$$

$$B_\varphi^i = \frac{I}{2\pi}\,\mu_0 \frac{\rho}{R^2}$$



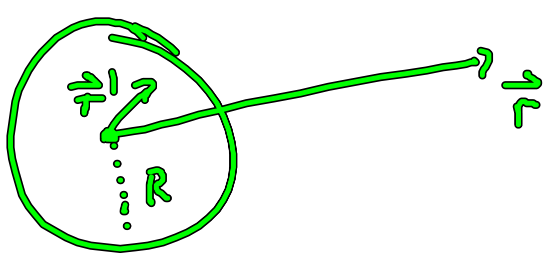
analog. E_ρ

9.7. Direkte Lösung der Integraldarstellung der Potentiale f. statische Probleme

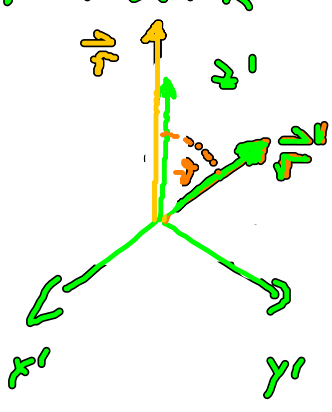
$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int dV' \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec j(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

a) homogen geladene Kugel $\rho(\vec r) =$ konst in Radius R



$|\vec r - \vec r\,'|$



$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty dr'\, r'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \frac{\rho_0\, \Theta(R-r')}{(r^2 + r'^2 - \underbrace{2\vec r\cdot\vec r\,'}_{})^{1/2}}$$

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \text{konst. Ladungsdichte}$$

$rr'\cos\vartheta$

Integral φ: 2π , Integral ϑ : $\cos\vartheta = x$, r' ist einfach

$$\frac{dx}{d\vartheta} = -\sin\vartheta$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{4\pi R^3}{3}} \int_0^R dr'\, r'^2 (2\pi) \underbrace{\int_{-1}^{1} dx \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'x)^{1/2}}}_{\frac{2}{-2rr'}\left(r^2+r'^2-2rr'x\right)^{1/2}\Big|_{-1}^{+1}}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{Q}{R^3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R dr'\, r'^2 \underbrace{\left(-\frac{\left([r-r']^2\right)^{1/2} - \left([r+r']^2\right)^{1/2}}{rr'}\right)}_{\frac{-|r-r'| + (r+r')}{r\cdot r'}}$$

hier entsteht Unterschied innen/außen

Fall unterscheiden

(i) $r > R$ (Außenraum)

$$\phi = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{R^3}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R dr'\,\frac{r'}{r}\,2r' = \frac{Q}{\cancel{\frac{R^3}{3}}}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\cancel{\int_0^R dr'\,r'^2}$$

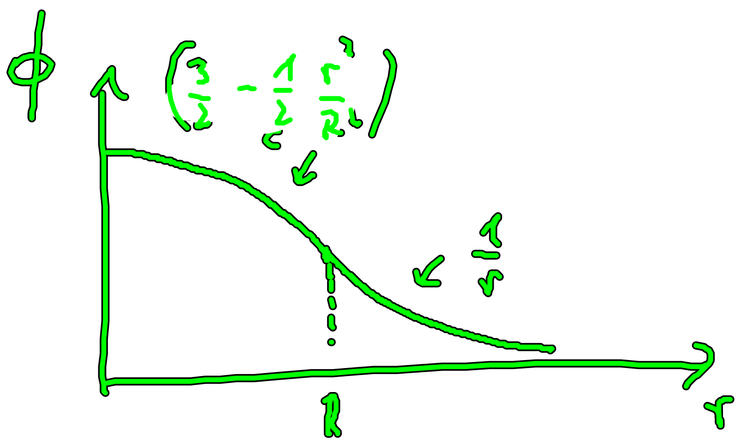
$$\phi^a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

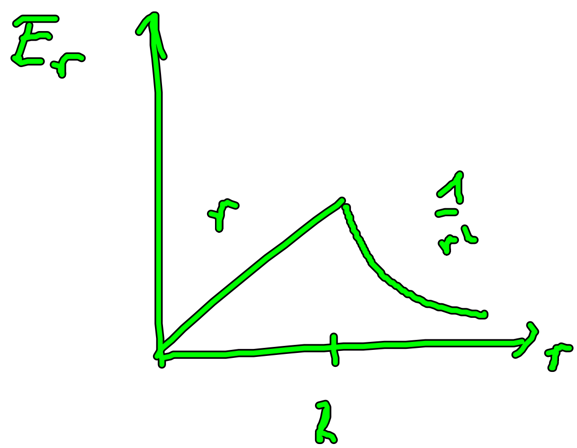
Potential im Außenraum sieht aus, als wäre die Gesamtladung bei Null lokalisiert.

$\Longrightarrow$ Gültigkeit Punktmodelle

<u>ohne Rechnung:</u>

$$\varphi^i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)$$

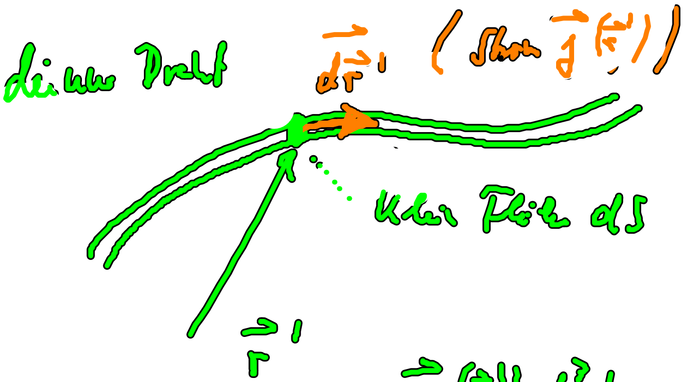




b) Biot Savart Gesetz f. dünne Drähte

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Berechnung d. Magnetfelds f. Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$



$$\underbrace{\vec{j}(\vec{r}')\, d^3r'}_{\underbrace{\vec{j}(\vec{r}')\, dS'\, dr'}_{dI\, d\vec{r}'}} = dI\, d\vec{r}'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\iint_S dI(\vec{r}')}_{\text{Drahtquerschnitt}} \int_{\text{Stromlinie}} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

f. geschlossene Drähte (Stromkreis) kann das geschlossene Linienintegral berechnet werden.

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{I}_{\text{Strom d. Draht}} \oint \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}}$$

Biot-Savart Gesetz f. dünne Drähte

9.8. Methode d. Spiegelladungen

$$\phi = \phi_{inhom.} + \phi_{homog.}$$

Quelle (ρ) — $\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Delta \phi = 0$

Randbeding. für Umgebg gibt das ϕ_{hom} vorstellen

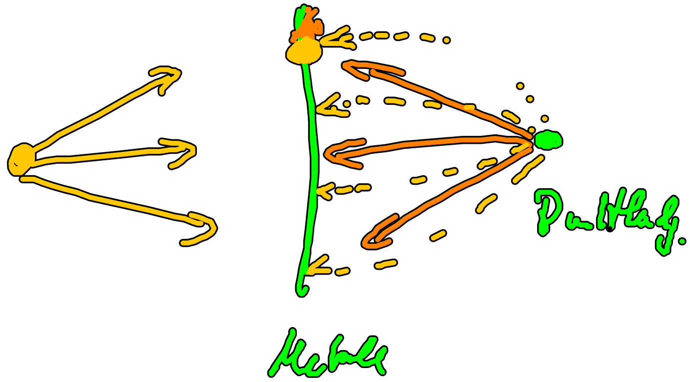
<u>Vorstellg</u>: fiktive Ladungsverteilg. in Umgebg. anbringen um RB zu sichern,

f.L. erfüllt im interessanten Raum (rechts)

die Laplacegl. $\Delta\phi = 0 \;\hat{=}\; \phi_{hom}$

die rechts und verwendet werden kann

um RB zu befriedigen.



(Tutorium)