10. Abstrahlung vorgegebener Quellen:

Erzeugung v. elektromagnetischer Wellen

Ziel: zeitlich veränderliche Strom/Ladungsverteilg.:
Berechnung v. emittierten Wellen

$$\left.\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= \sum_\omega \rho_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \\ \vec{j}(\vec{r},t) &= \sum_\omega \vec{j}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\}$$

$\rho_\omega, \vec{j}_\omega$: Fourieramplituden von Strom/Ladungsdichte

→ beliebige Zeitabhängigkeit d. Überlagerung v. $\rho_\omega, \vec{j}_\omega$.

Ziel: Bestimmung der Felder außerhalb der $\rho, \vec{j}$ - Verteilung

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \partial_t \vec{E} = c^2\, \vec{\nabla} \times \vec{B}}$$

außerhalb der Quelle ist Kenntnis v. $\vec{A}$ ausreichend

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Lorenzeichung (retardierte Potentiale)

$\vec{j}$: wird von außen vorgegeben.

Fourierdarstellung einsetzen

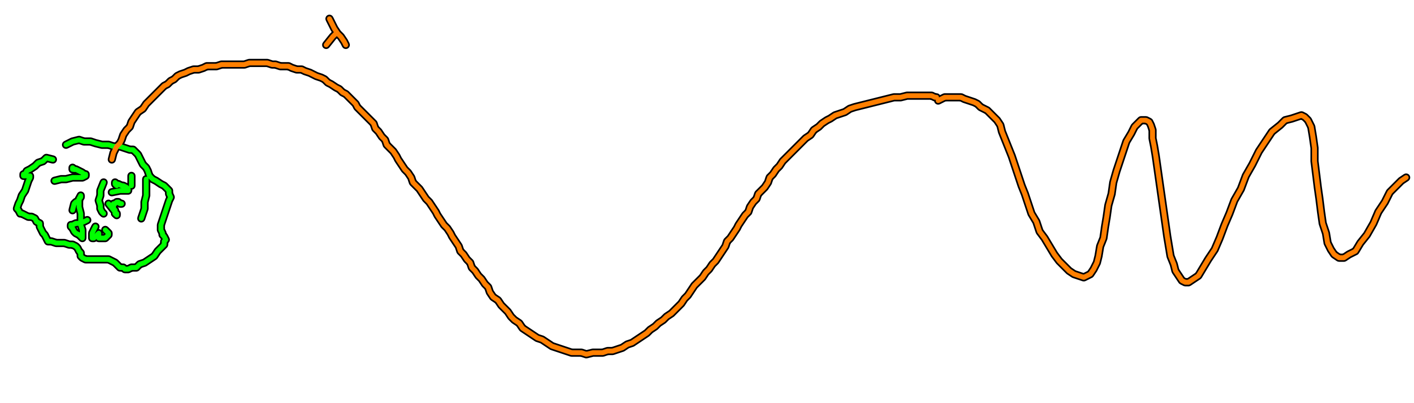
$$\sum_\omega \vec{A}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

formal analysieren

10.1. Qualitative Diskussion v. Kleinen Quellen

$$|\vec{r}'| \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$$



Nahzone

Induktionszone (4-5 λ)

Fernzone

$|\vec{r}| \gg \lambda$

(1) Nahzone $|\vec r| \ll \lambda$

$$k\,|\vec r - \vec r\,'| \sim \frac{1}{\lambda}\,|\vec r - \vec r\,'|$$

$$\leadsto \quad \vec A_\omega(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec j_\omega(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

- analog stationäres Magnetfeld, aber mit ω oszillierend ($\vec A_\omega(\vec r)\,\hat{=}$ Formeln)

Nanooptik

- Entfernungen v. Quelle ($\vec r$) sind zu klein um Welleneffekte auszubilden

(2) Mittelzone / Induktionszone

Schwierig! $k\cdot|\vec r - \vec r\,'|$ muss mitgedacht werden.

(3) Fernzone $|\vec r\,'| \ll |\vec r|$, $\lambda \ll |\vec r|$

(mindestens 5λ weg v. Quelle)

allernaivster Ansatz:

$$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_\omega \int d^3r'\,\vec j_\omega(\vec r\,')\,\frac{e^{ik|\vec r - \vec r\,'|}}{|\vec r - \vec r\,'|}\,e^{-i\omega t}$$

$|\vec r| = r$, $\vec r\,' \to 0$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \underbrace{\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}\,')}_{\text{Geometriefaktor}}$$

für große Entfernungen v. Quelle ist die Abstrahlung immer Kugelwellenartig

10.2. Multipolstrahlung f. kleine Quellen

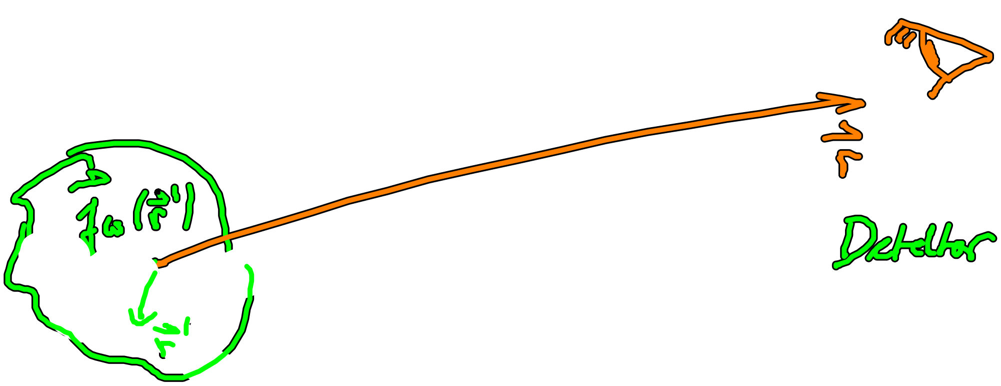
genauer wird im Fernfeld, Details d. Quelle auflösen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}\,') e^{-i\omega t}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'} \approx r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}$$

besser behandeln

1. Ordnung Taylor



$$\boxed{\vec A(\vec r,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_\omega \int d^3r'\, \vec j_\omega(\vec r')\, \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\substack{\text{nullte Ordnung}\\ \text{Taylor}}}\; \underbrace{e^{-ik\vec e_r\cdot\vec r'}}_{\substack{\text{1. Ordnung}\\ \text{Taylor}}}\; e^{-i\omega t}}$$

(bisher λ noch offen ohne Näherung.)

Achtg.! nur $e^{i\cdots}$ wird entwickelt, typischerweise $\frac{1}{|\cdots|}$ macht klein wenn gerade lokale Effekte

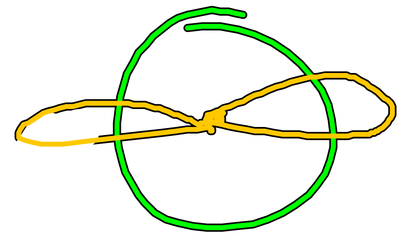
Multipolentwicklung!

$$\vec A(\vec r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_\omega \underbrace{\frac{e^{-i\omega t+ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \int d^3r'\, \vec j_\omega(\vec r') \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-ik\vec e_r\cdot\vec r'\right)^n}{n!}}_{e^{-ik\vec e_r\cdot\vec r'}}$$

gilt f. $\lambda \gg |\vec r'|$ oder f. kleine Antennen

10.3. Berechnung d. Fernfeldes

$$\vec{A}_\omega = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}\,') \, e^{-i\vec{k}\vec{e}_r\cdot\vec{r}\,'}}_{\text{Formfaktor legt Abstrahlrichtg. fest}}$$



$$\vec{B}_\omega = \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega$$

$$\vec{E}_\omega = -\vec{\nabla}\phi_\omega + i\omega\vec{A}_\omega$$

betrachte nur 1 ω - Komponente, am Ende Summe bilden

$\phi_\omega = ?$ Lorenzbedingg $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega - \frac{i\omega}{c^2}\phi_\omega$

$$\vec{E}_\omega = i\frac{c^2}{\omega}\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega + i\omega\vec{A}_\omega$$

$\rightarrow$ alles auf $\vec{A}_\omega$ zurückgeführt

Fernfeld: Kugelkoordinaten wählen

$$\vec\nabla = \Big(\underbrace{\partial_r}_{\sim e^{ikr}k},\ \underbrace{\frac{1}{r}\partial_\vartheta,\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi}_{\sim \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0}\Big) \equiv \underbrace{\vec e_r\,\partial_r}_{\text{überlebt im Fernfeld wenn Terme} \sim k \text{ mitgenommen werden}}$$

nur Terme proportional zu k mitnehmen

$$\vec\nabla\cdot\vec A_\omega \approx ik\,(\vec e_r\cdot\vec A_\omega)$$

$$\vec\nabla\,\vec\nabla\cdot\vec A_\omega \approx (ik)^2\,\vec e_r\,(\vec e_r\cdot\vec A_\omega)$$

$$\vec E_\omega = -i\omega\big(\underbrace{\vec e_r(\vec e_r\cdot\vec A_\omega) - \vec A_\omega}_{-\vec A_\omega^{\perp}}\big) =$$

$$\vec A_\omega^{\perp} = \big(\vec A_\omega - \vec e_r(\vec e_r\cdot\vec A_\omega)\big) = \vec A_\omega - \vec A_\omega^{\parallel}$$

vom vollen $\vec A_\omega$-Feld wird der Anteil in Richtg. der Ausbreitg. ($\vec e_r$) abgezogen)

$A^\perp$ stellt sicher, daß das Feld nur transversale Anteile enthält!

$$\boxed{\rightarrow \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}^{\perp}_\omega(\vec{r}')\,e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}}$$

beobachtbare Größe ist $\vec{E}$ Feld

und wird durch den transversalen Strom $\vec{j}^{\perp}$ bestimmt.

10.4. Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols

starte v. $\vec{A}$-Feld, rechnen dann ins E-Feld um

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\vec{j}_\omega(\vec{r}')\,\underbrace{e^{ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}}_{\approx 1}$$

$$k\,|\vec{r}'| = \frac{|\vec{r}'|}{\lambda} \ll 1$$

führt auf elektrische Dipolstrahlung

partielle Integration

$$\int d^3r'\,\vec{j}_\omega(\vec{r}') \overset{\checkmark}{=} \int d^3r' \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \vec{e}_\beta\,\partial_\alpha x'_\beta\,j_{\omega\alpha}(\vec{r}')}_{\sum_{\alpha,\beta}\vec{e}_\beta\,\delta_{\alpha\beta}\,j_{\omega\alpha}}$$

zu zeigen, daß die ein Dipolanteil ist

$$= \sum_\alpha \vec{e}_\alpha\,j_{\omega\alpha} = \vec{j}_\omega(\vec{r})$$

$$= \int d^3r \left(-\vec r\,' \underbrace{\vec\nabla\cdot\vec j_\omega(\vec r\,')}\right) \qquad (\vec\nabla\cdot\vec j + \partial_t\rho = 0)$$

$$= \int d^3r\, -\vec r\,'\left(+i\omega\rho_\omega(\vec r\,')\right)$$

$$= -i\omega \underbrace{\int d^3r'\,\vec r\,'\rho_\omega(\vec r\,')}$$

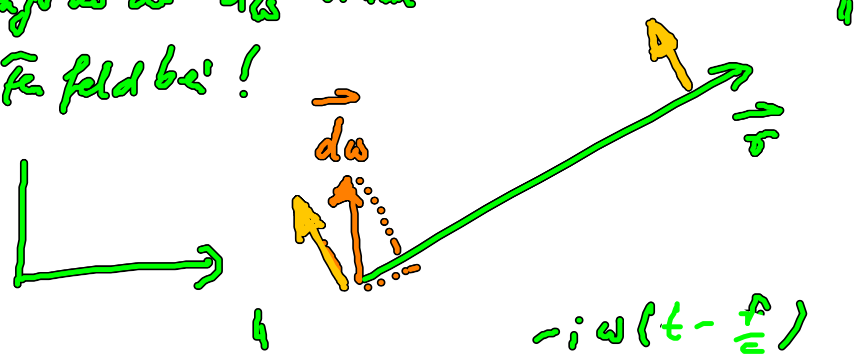
$\vec d_\omega$: Dipolmoment der Ladungsverteilung $\rho_\omega(\vec r)$

$$\boxed{\downarrow\ \vec A_\omega(\vec r) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec d_\omega \frac{e^{ikr}}{r}}$$

Vektorpotential d. elektrischen Dipols

$$\downarrow\ \vec E_\omega(\vec r) = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\left(\underbrace{\vec e_r(\vec e_r\cdot\vec d_\omega)-\vec d_\omega}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

es trägt nur der $\vec d_\omega^{\perp}$ Anteil im Fernfeld bei!



Gesamtlösung:

$$\vec E(\vec r,t) = \sum_\omega -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\left(\vec e_r(\vec e_r\cdot\vec d_\omega)-\vec d_\omega\right)\frac{e^{\overbrace{i\frac{\omega}{c}r-i\omega t}^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}}{r}$$

$$\omega^2 \to -\partial_t^2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \partial_t^2 \left(\vec{e}_r\; \vec{e}_r \cdot \vec{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \vec{d}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \frac{1}{r}$$

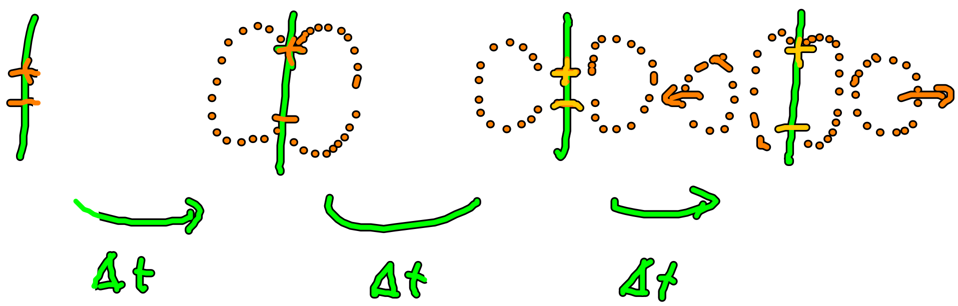
Bemerkungen:

a) Dipolstrahlg. aufgrund v. $\ddot{\vec{d}}$, d.h. beschleunigte Bewegung

b) man erkennt Zeitverzögerung

c) man erkennt $\tilde{E} \sim \frac{1}{r}$

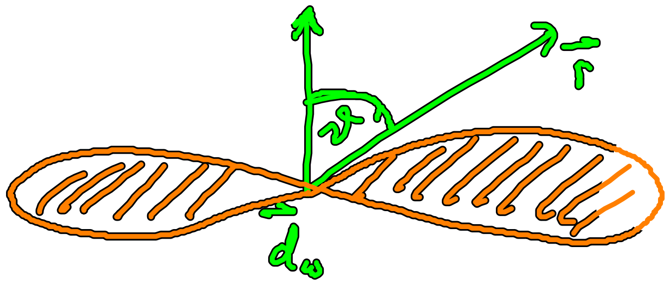
d) Zeitablauf:



e) Energiestrom $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \vec{B}\, \frac{1}{\mu_0}$

analoge Bedg. zu beschleunigter Punktladung

$$\vec{S} \sim \vec{e}_r \sin^2\vartheta \; d_\omega^2$$



maximale Ab-
strahlg $\perp$
zu Dipolbewegg.