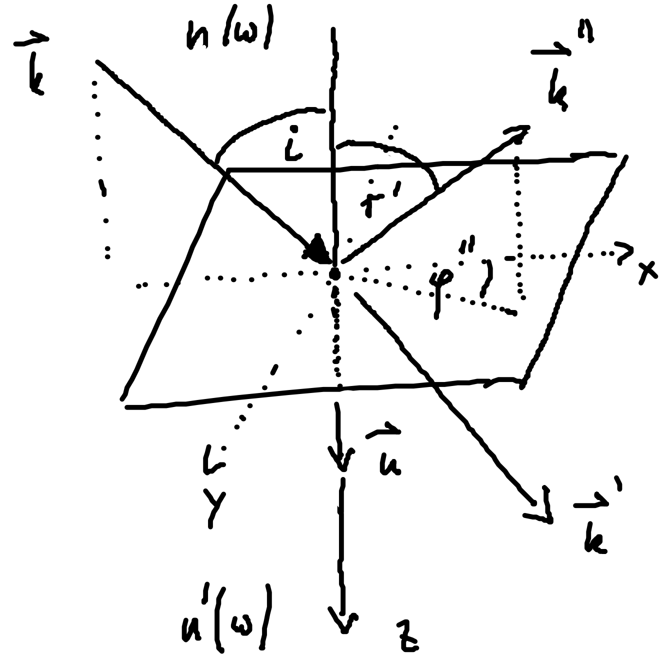
11.4. Wellenausbreitung durch Grenzflächen

11.4.1. Folgerungen aus Stetigkeit

- Licht an Grenzfläche: $z = 0$ (x-y Ebene) mit Brechzahl / Permeabilitäts-unterschied
- Zerlegung nach ebenen Wellen



$\vec{n}$: Einheitsvektor in z-Achse richtung

$\left.\begin{array}{l} \vec{k}: \text{einfallende} \\ \vec{k}'': \text{reflektiert} \\ \vec{k}': \text{gebrochen} \end{array}\right\}$ Ansatz im Fourier-raum d. ebenen Welle

i: Einfallswinkel zur z-Achse

r': Reflexionswinkel

Stetigkeit: $z = 0$

$$X_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + X_0'' e^{i(\vec{k}''\vec{r} - \omega'' t)} = X_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}$$

irgendeine Komponente die stetig ist

– allgemeinster Ansatz, $\vec{k}$-Komponente sind $X_0 = X_0(\vec{k})$ für eine Überlagerung v. allen $\vec{K}$.

– Bedingg. müssen an jedem Ort x, y gelten, auch: $\forall$ Zeiten

$\rightarrow$ Phase sollte gleich sein

1. Folgerung: $\omega = \omega' = \omega''$

Reflexion und Brechg. ändern nicht die Frequenz

2. Folgerung: $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r}$, $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r}$ $(z=0)$

Kugelkoordinaten: $\vec{k} = (k \cos\varphi \sin\vartheta, k \sin\varphi \sin\vartheta, k \cos\vartheta)$

$\vartheta = i$, wähle $\varphi = 0$ festlegen

$\vec{r} = (x, y, z)$ bei $z = 0$

$$\left.\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{r} &= k x \cos(0) \sin(i) + k y \sin(0) \sin(i) \\ \vec{k}'' \cdot \vec{r} &= k'' x \cos(\varphi'') \sin(\pi - r') + k'' y \sin\varphi'' \sin(\pi - r') \end{aligned}\right\} =$$

$$\left(k, k'' = \frac{\omega}{c} n(\omega)\right)$$

$$\rightarrow x \underline{\sin(i)} = x \underline{\cos(\varphi'') \sin(r')} + y \underline{\sin(\varphi'') \sin(r')}$$

x, y müssen unabhängig voneinander wählbar sein (ebene Welle)

$$\sin(i) = \cos(\varphi'') \sin(r') \longrightarrow \boxed{\sin(i) = \sin(r')}$$

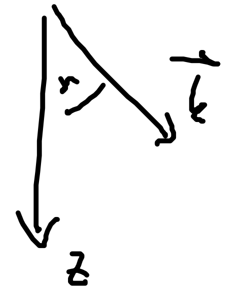
$$\sin(\varphi'') \sin(r') = 0 \longrightarrow \varphi'' = 0 \quad (r' = 0 \mathrel{\hat{=}} \perp \text{ Einfall})$$

$\longrightarrow$ Einfall- und Reflexionswinkel sind gleich

$$\boxed{i = r'} \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

3. Folgerung

$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r}$, analoge Bedingung:



$$k \sin(i) = k' \sin(r) \quad \text{(Brechungswinkel } r\text{)}$$

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad k' = \frac{\omega}{c} n'(\omega)$$

→ Brechungsgesetz: $\boxed{\dfrac{\sin(i)}{\sin(r)} = \dfrac{n'}{n}}$

ebenso: $\varphi' = 0$ Polarwinkel v. $\vec{k}'$

→ $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene (x-z Ebene)

4. Folgerung: Konkrete Stetigkeitsbedingungen

a) D_n ist stetig bei $z = 0$

$$(\vec{D} + \vec{D}'') \cdot \vec{n} = \vec{D}' \cdot \vec{n} \quad \Big|_{z=0}$$

alles auf $\vec{E}$-Feld umschreiben

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \varepsilon = n^2, \quad \varepsilon' = n'^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \varepsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \cdot \vec{n} = \varepsilon' \vec{E}_0' \cdot \vec{n}}$$

Koeffizient d. eben Welle

b) B_n ist stetig, beidseitig: $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0$

$$\boxed{\Rightarrow \left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0''\right)\cdot \vec{n} = \left(\vec{k}' \times \vec{E}_0'\right)\cdot \vec{n}}$$

c) E_t ist stetig

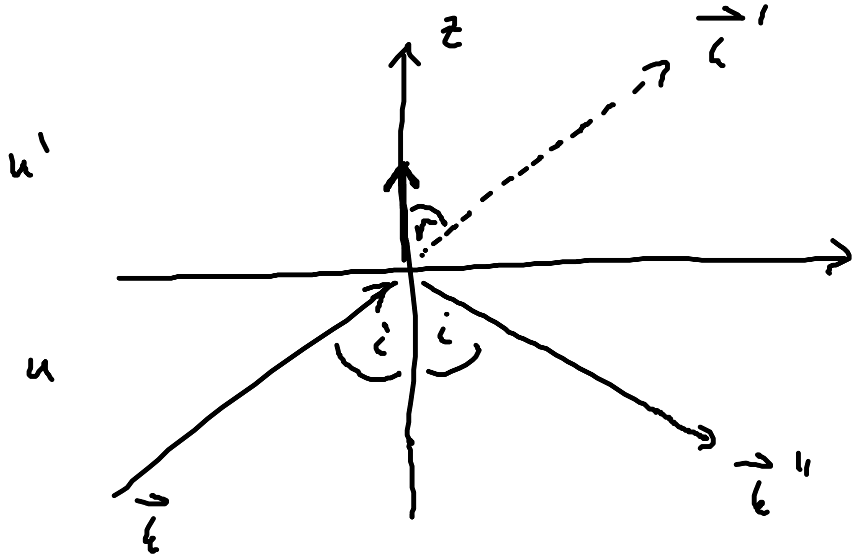
$$\boxed{\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right) \times \vec{n} = \vec{E}_0' \times \vec{n}}$$

d) H_t ist stetig, $\underbrace{\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0 \mu} \quad \text{und} \quad \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}_0}_{\text{verwende}}$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}\left(\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0''\right) \times \vec{n} = \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}' \times \vec{E}_0'\right) \times \vec{n}}$$

jetzt Auswertung unter den bereits gefundenen Folgerungen ($i = r'$, Brechungsgesetz, $\vec{k}$'s in einer Ebene)

11.4.2. Ableitg. der Fresnelformeln



1 Ebene!

Klassifizig. d. Ausbreitg.

Ebene die durch $\vec{k}, \vec{n}$ aufgespannt wird (x-z) : Einfallsebene = EFE

klassifiziert 2 Typen der Lichtausbreitung

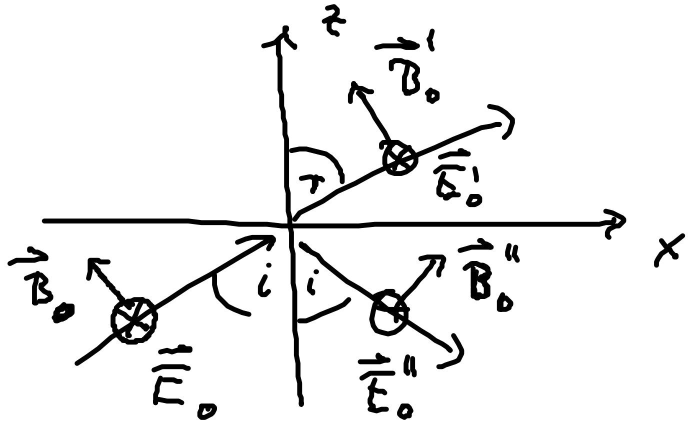
(i) Polarisationsrichtg. d. eingestrahlten E-Felds

$\perp$ zur EFE : s-polarisiert

(ii) $\parallel$ zur EFE : p-polarisiert

Allgemeinfall : elliptisches Licht : Überlagerung v. s, p.

(i) $\perp$ Polarisation (s)



(a, b) - Stetigkeit d. Normale : gibt nichts interessantes, E ist $\underline{\underline{E_t}}$

c) $(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'') \times \vec{n} = \vec{E}_0' \times \vec{n}$

$$\rightarrow \vec{E}_0 + \vec{E}_0'' = \vec{E}_0'$$

(sind alle tangential)

d) $\frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'') \times \vec{n} = \frac{1}{\mu'} (\vec{k}' \times \vec{E}_0') \times \vec{n}$

doppeltes Kreuzprodukt von $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{n}$ auf

$$\vec{n} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) = \underbrace{\underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{E}_0)}_{\vec{n} \perp \vec{E}_0} \vec{k}}_{=0} - (\vec{n} \cdot \vec{k}) \vec{E}_0$$

$$\rightarrow \frac{1}{\mu} (\vec{n} \cdot \vec{k}) \vec{E}_0 + (\vec{n} \cdot \vec{k}'') \vec{E}_0'' = \frac{1}{\mu'} (\vec{n} \cdot \vec{k}') \underline{\underline{\vec{E}_0'}}$$

Winkel über Skalarprodukt:

Zeige alle $\perp$ Ebene

$$\frac{k}{\mu} E_0 \cos(i) + \frac{k''}{\mu} E_0'' \overbrace{\cos(\pi - i)}^{\cos(i)} = \frac{k'}{\mu'} E_0' \cos(r)$$

bekannt

unbekannt, aber

c) $E_0 + E_0'' = E_0'$

bekannt

i ist bekannt

r ist auch bekannt, denn Brechungsgesetz

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n}{n'} \longrightarrow \cos(r) = \frac{1}{n'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i)}$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r}$$

umstellen nach $\frac{E_0'}{E_0}$ bzw $\frac{E_0''}{E_0}$

Fresnelsche Formeln:

Amplitudenverhältnis von gebrochenem und eingestrahltem E-Feld

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos(i)}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

reflektiertem und eingestrahltem E-Feld

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos(i) - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

(ii) $E \parallel$ zur Einfallsebene

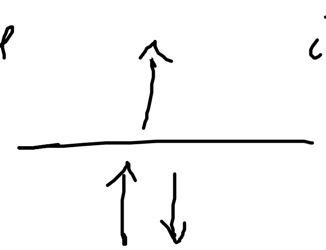
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn'\cos(i)}{n'^2 \frac{\mu}{\mu'}\cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'^2 \frac{\mu}{\mu'}\cos(i) - n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

Bemerkungen.

a) Formeln heißen Fresnelsche Formeln und legen die Amplitudenverhältnisse bei Reflexion und Brechung fest, als Funktion von μ, μ', n, n' und i.

b) Grenzfall $\perp$ Einfall



$i = 0$

n'

n

$\mu = \mu'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n - n'}{n'+n}$$

f. $n' > n$, erhält man einen Phasensprung, weil E_0'' vgl. mit E_0 das Vorzeichen wechselt

$$\left(-1 = e^{i\pi} \right)$$