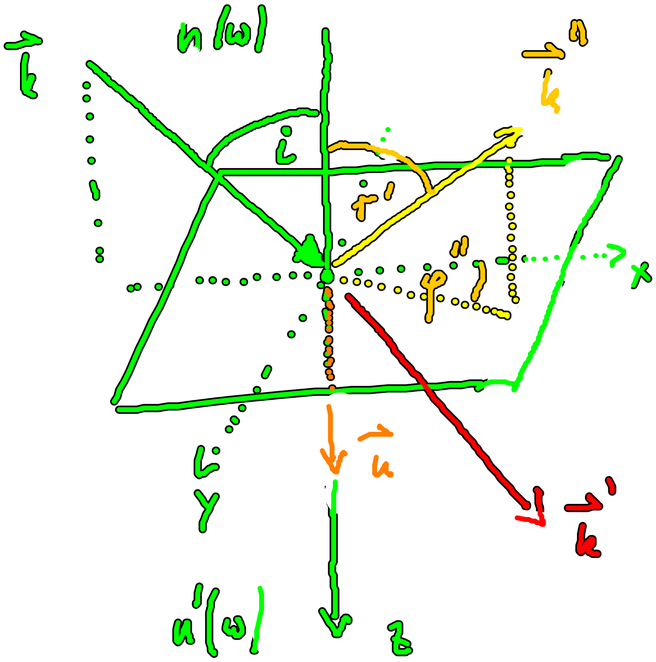
11.4. Wellenausbreitung durch Grenzflächen

11.4.1. Folgerungen aus Stetigkeit

- Licht an Grenzfläche: $z = 0$ (x-y Ebene) mit Brechzahl/Permeabilitäts-unterschied
- Zerlegung nach ebenen Wellen



$\vec{n}$: Einheitsvektor in z-Achse richtung

$\left.\begin{array}{l} \vec{k}\text{: einfallend} \\ \vec{k}''\text{: reflektiert} \\ \vec{k}'\text{: gebrochen} \end{array}\right\}$ Ansatz im Fourierraum d. ebenen Welle

i: Einfallswinkel zur z-Achse

r': Reflexionswinkel

Stetigkeit: $z = 0$

$$X_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + X_0'' e^{i(\vec{k}''\cdot\vec{r} - \omega'' t)} = X_0' e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r} - \omega' t)}$$

irgendeine Komponente die stetig ist

– allgemeiner Ansatz, $\vec{k}$-Komponente sind $X_0 = X_0(\vec{k})$ für eine Überlagerung v. allen $\vec{k}$.

– Bedingg. müssen an jedem Ort x, y gelten, auch: ∀ Zeiten

→ Phasen selbst gleich sein

<u>1. Folgerung</u>: $\omega = \omega' = \omega''$

Reflexion und Brechg. ändern nicht die Trägerfrequenz

<u>2. Folgerung</u>: $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}''\cdot\vec{r}$, $\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}'\cdot\vec{r}$ $(z=0)$

Kugelkoordinaten: $\vec{k} = (k\cos\varphi\sin\vartheta, k\sin\varphi\sin\vartheta, k\cos\vartheta)$

$\vartheta = i$, wähle $\varphi = 0$ festlegen

$\vec{r} = (x, y, z)$ bei $z = 0$

$$\left.\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{r} &= kx\cos(0)\sin(i) + ky\sin(0)\sin(i)\\ \vec{k}''\cdot\vec{r} &= k''x\cos(\varphi'')\sin(\pi - r') + k''y\sin\varphi''\sin(\pi - r')\end{aligned}\right\} =$$

$$\left(k, k'' = \frac{\omega}{c}n(\omega)\right)$$

$$\rightarrow x\,\underline{\sin(i)} = x\,\underline{\cos(\varphi'')\sin(r')} + y\,\underline{\sin(\varphi'')\sin(r')}$$

x, y müssen unabhängig voneinander wählbar sein (ebene Welle)

$$\sin(i) = \cos(\varphi'')\sin(r') \longrightarrow \boxed{\sin(i) = \sin(r')}$$

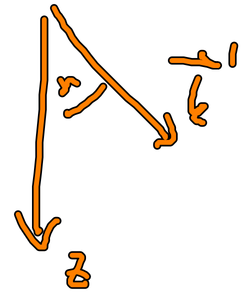
$$\sin(\varphi'')\sin(r') = 0 \longrightarrow \varphi'' = 0 \quad (r' = 0 \mathrel{\hat{=}} \perp \text{ Einfall})$$

→ Einfall- und Reflexionswinkel sind gleich

$\boxed{i = r'}$ Reflexionsgesetz

3. Folgerung

$\vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}'\cdot\vec{r}$, analoge Rechnung:



$$k \sin(i) = k' \sin(r) \quad \text{(Brechungswinkel } r\text{)}$$

$$k = \frac{\omega}{c} n(\omega), \quad k' = \frac{\omega}{c} n'(\omega)$$

→ Brechungsgesetz: $$\boxed{\frac{\sin(i)}{\sin(r)} = \frac{n'}{n}}$$

ebenso: $\varphi' = 0$ Polarwinkel v. $\vec{k}'$

→ $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$ liegen in einer Ebene (x-z Ebene)

4. Folgerung: Konkrete Stetigkeitsbedingungen

a) D_n ist stetig bei $z=0$

$$(\vec{D} + \vec{D}'')\cdot\vec{n} = \vec{D}'\cdot\vec{n} \quad \Big|_{z=0}$$

alles auf $\vec{E}$-Feld umschreiben

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \qquad \varepsilon = n^2, \quad \varepsilon' = n'^2$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \varepsilon(\vec{E}_0 + \vec{E}_0'')\cdot\vec{n} = \varepsilon'\vec{E}_0'\cdot\vec{n}}$$

Koeffizient d. ebenen Wellen

b) B_n ist stetig, beidseitig: $\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0$

$$\boxed{\Downarrow \left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\cdot\vec{n} = \left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\cdot\vec{n}}$$

c) E_t ist stetig

$$\boxed{\left(\vec{E}_0 + \vec{E}_0''\right)\times\vec{n} = \vec{E}_0'\times\vec{n}}$$

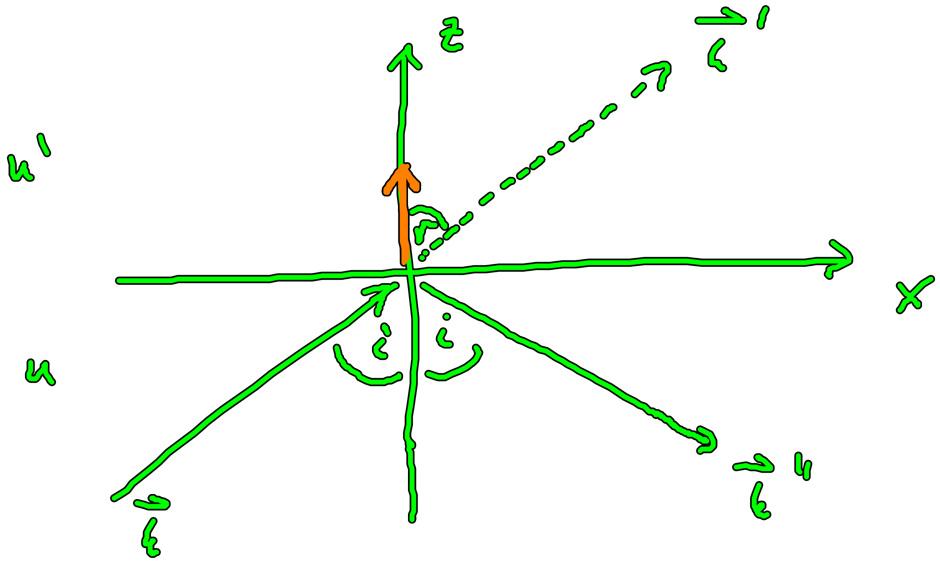
d) H_t ist stetig, $\underbrace{\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0\mu} \text{ und } \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0}_{\text{verwenden}}$

$$\boxed{\frac{1}{\mu}\left(\vec{k}\times\vec{E}_0 + \vec{k}''\times\vec{E}_0''\right)\times\vec{n} = \frac{1}{\mu'}\left(\vec{k}'\times\vec{E}_0'\right)\times\vec{n}}$$

jetzt Auswertung unter den bereits gefundenen Folgerungen ($i = r'$, Brechungsgesetz, $\vec{k}$'s in einer Ebene)

11.4.2. Ableitg. der Fresnelformeln

1 Ebene!



Klassifizig. d. Ausbreitg.

Ebene die durch $\vec{k}, \vec{k}''$ aufgespannt wird (x-z) : $\underline{\underline{\text{Einfallsebene}}}$ EFE

klassifiziert 2 Typen der Lichtausbreitung

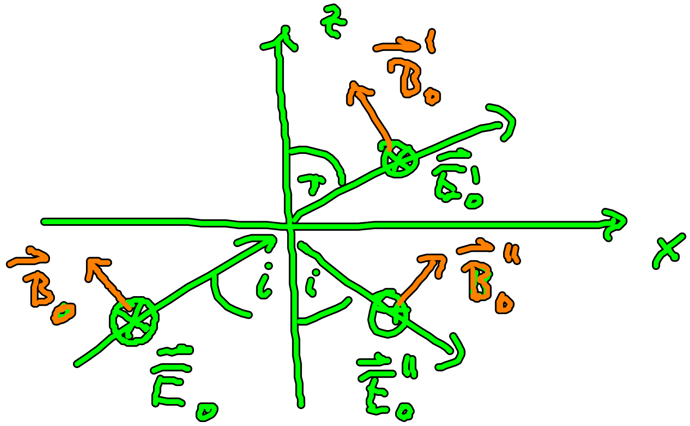
(i) Polarisationsrichtg. d. eingestrahlten $\vec{E}$-Felds

$\perp$ zur EFE : s-polarisiert

(ii) $\parallel$ zur EFE : p-polarisiert

Allgemeinfall : elliptisches Licht : Überlagerung v. s, p.

(i) $\perp$ Polarisation (s)



(a,b) – Stetigkeit d. Normalen: gibt nichts interessantes, E und $\vec E_t$

c) $(\vec E_0 + \vec E_0'') \times \vec n = \vec E_0' \times \vec n$

$\rightarrow \vec E_0 + \vec E_0'' = \vec E_0'$

(sind alle tangential)

d) $\frac{1}{\mu}\left(\vec k \times \vec E_0 + \vec k'' \times \vec E_0''\right) \times \vec n = \frac{1}{\mu'}\left(\vec k' \times \vec E_0'\right) \times \vec n$

doppeltes Kreuzprodukt von $\vec k, \vec E_0, \vec n$ auf

$$\vec n \times (\vec k \times \vec E_0) = \underbrace{\underbrace{(\vec n \cdot \vec E_0)}_{\vec n \perp \vec E_0}}_{=0} \vec k - (\vec n \cdot \vec k)\vec E_0$$

$$\frac{1}{\mu}\left((\vec n \cdot \vec k)\vec E_0 + (\vec n \cdot \vec k'')\vec E_0''\right) = \frac{1}{\mu'}(\vec n \cdot \vec k')\vec E_0'$$

Wille über Skalarprodukt:

Zeige alle $\perp$ Ebene

$$\frac{k}{\mu} E_0 \cos(i) + \frac{k''}{\mu} E_0'' \overbrace{\cos(\pi - i)}^{\cos(i)} = \frac{k'}{\mu'} E_0' \cos(r)$$

bekannt

unbekannt, aber

$E_0 + E_0'' = E_0'$

bekannt

i ist bekannt

r ist auch bekannt, denn Brechungsgesetz

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{n}{n'} \longrightarrow \cos(r) = \frac{1}{n'}\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i)}$$

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r}$$

umstellen nach $\frac{E_0'}{E_0}$ bzw $\frac{E_0''}{E_0}$

Fresnelsche Formeln:

Amplitudenverhältnis von gebrochenem und eingestrahltem E-Feld

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n\cos(i)}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

reflektiertes und eingestrahltes E-Feld

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n\cos(i) - \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}{n\cos(i) + \frac{\mu}{\mu'}\sqrt{n'^2 - n^2\sin^2(i)}}$$

(ii) $E \parallel$ zur Einfallsebene

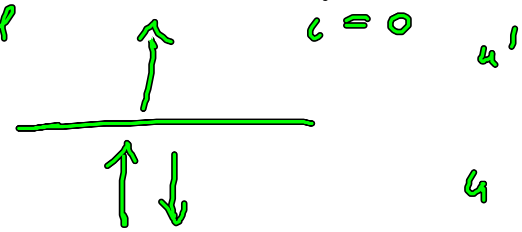
$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2nn' \cos(i)}{n'^2 \frac{\mu}{\mu'} \cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i)}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{n'^2 \frac{\mu}{\mu'} \cos(i) - n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i)}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos(i) + n\sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2(i)}}$$

Bemerkungen:

a) Formeln heißen Fresnelsche Formeln und legen die Amplitudenverhältnisse bei Reflexion und Brechung fest, als Funktion von μ, μ', n, n' und i.

b) Grenzfall $\perp$ Einfall $\quad i = 0$



$\mu = \mu'$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2n}{n'+n}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{n - n'}{n'+n}$$

f. $n' > n$, erhält man einen Phasensprung, weil E_0'' vgl. mit E_0 das Vorzeichen wechselt

$$\left(-1 = e^{i\pi} \right)$$