Rayleigh-Streuung: elastische Streuung (energieerhaltend) von elektromagn. Welle an Teilchen

(typischerweise: $\lambda \gg$ Ausdehnung d. Teilchen)

Streuformel

$$\text{Streuquerschnitt } S = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \int d^3 r' \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \, \vec{e}_0 \cdot \vec{e} \; \delta\varepsilon(\vec{r}') \right|^2$$

eingestrahlt, Detektion

$ck = \omega$

Volumenintegral über alle Streuer

$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$

detektierte Lichtrichtg., eingestrahlte Richtg.

ε-Variation aufgrund d. Streuer

12.2. Rayleigh-Streuung an Punktdipolen

Beispiel f. Streuung in Gasen

Bestimmung v. $\delta\varepsilon(\vec{r})$

$$(*) \quad \vec{P}_\omega = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)\, \vec{d}_j(\omega) = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)\, \varepsilon_0 \alpha_j(\omega) E_\omega(\vec{r}_j)$$

Summe über alle Dipole

Raumposition ein. Dipols

j-te Dipol am Ort $\vec{r}_j$

Polarisierbarkeit d. j-ten Moleküls

$\delta\varepsilon(\vec{r}) = ?$

$$\vec{D}_\omega = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}_\omega = \varepsilon_0 \vec{E}_\omega + \vec{P}_\omega \quad \rightarrow \quad \underbrace{\varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon - 1)}_{\delta\varepsilon} \vec{E}_\omega = \vec{P}_\omega}_{\text{Vergleich mit der Gl. (*)}}$$

$$\delta\varepsilon = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)\, \alpha_j(\omega) \equiv \delta\varepsilon(\vec{r})$$

einsetzen in den Streuquerschnitt HS für identische Moleküle $\alpha_j \equiv \alpha_0$

$$S = \frac{k^4}{16\pi^2} \left| \vec{e}_0 \cdot \vec{e} \right|^2 |\alpha_0(\omega)|^2 \underbrace{\left| \sum_j e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_j} \right|^2}_{\text{Form- bzw. Strukturfaktor}}$$

interessant: $S = S(\omega)$

$$S \sim \underline{\underline{\omega^4}}\, |\alpha_0(\omega)|^2\, F(\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0)$$

auch ω

<u>einfachste Annahme:</u>

$\alpha_0(\omega) \equiv \alpha_0$, d.h. keine Resonanzen

Strukturfaktor: $F(\vec{q}) = \left| \sum_j e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \right|^2 = \sum_{i,j} e^{i\vec{q}\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$

$$= \underbrace{\sum_{j \neq i} e^{i\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}}_{} + \underbrace{\sum_i 1}_{}$$

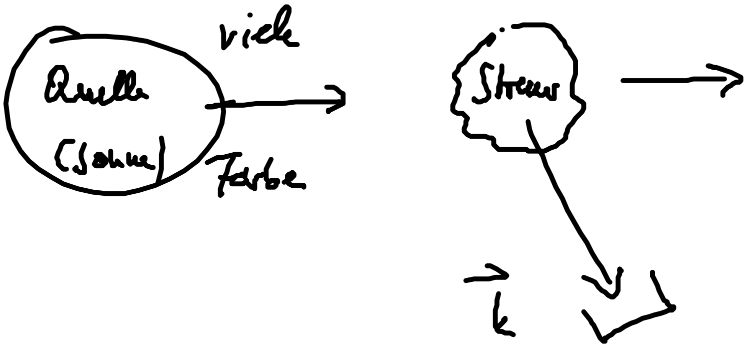
≈ 0 Gesamtteilchenzahl N

f. zufällig verteilte Moleküle : $\int_0^{2\pi} dy\, e^{i\varphi} \to 0$

Es verbleibt die einfachste mögl. Frequenzabhängigkeit:

$$S \sim k^4 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

$$S \sim \omega^4$$



in Transmission wird dann rotes Licht verstärkt wahrgenommen (Abendrot)

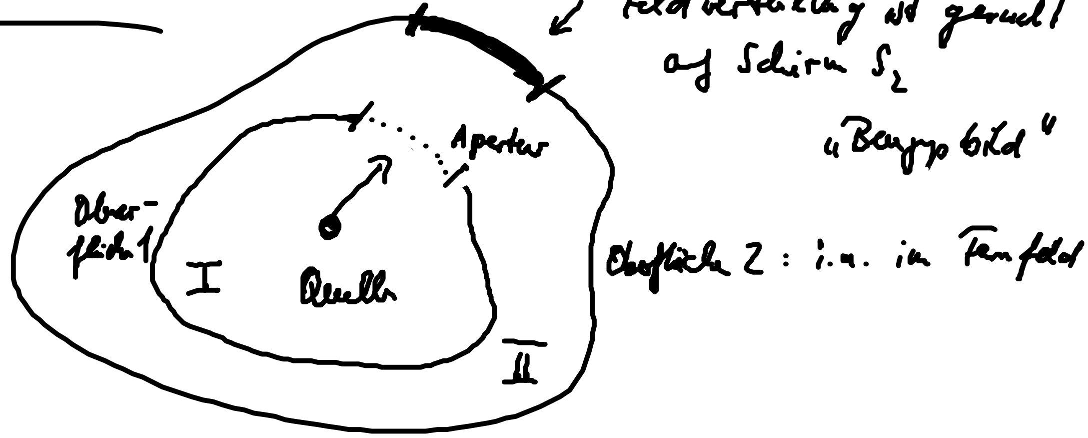
Licht, das nicht direkt v. Sonne kommt sondern als Streulicht wahrgenommen wird, zeigt eine Präferenz f. kurze Wellenlänge. (Himmelsblau)

12.3. Skalare Beugungstheorie

Beugung (engen Definition):

Wechselwirkung v. Welle mit Aperturen, typischen Öffnung $a \gg \lambda$

typische Situation



Maxwellgl. in Vakuum mit Randbedingungen $\hat{=}$ ordentlicher Zugang

Vektorbeugungstheorie

im Gegensatz dazu: skalare Beugungstheorie

$$(\Delta + k^2)\,\psi(\vec{r}) = 0 \qquad \text{f. 1 feste Frequenz}$$

$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, ψ: Feldkomponente

Greensche Funktion: $(\Delta + k^2)\, G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

(ohne 4π definiert)

Frage: $$\psi(\vec{r})\Big|_{S_2} = \oint\!\!\oint_{S_1} d\vec{A} \cdot \ldots$$

kann man $\psi(\vec{r})$ das auf S_2 beobachtet wird durch ein Oberflächenintegral über S_1 (abhängig Geometrie) darstellen?

dazu: Greensche Identitäten, $C(\vec r\,')$ sei gutartiges Vektorfeld

$$\int_{II} dV'\,\nabla'\cdot\vec C(\vec r\,') = \oiint_{S_1+S_2} d\vec A\,'\cdot\vec C(\vec r\,') \qquad \text{(Gauß)}$$

mit $\vec C = \phi\nabla\psi$: $\phi, \psi \mathrel{\hat=}$ beliebige Felder, skalar

$$\vec\nabla\cdot\vec C = \phi\Delta\psi + \vec\nabla\phi\cdot\vec\nabla\psi$$

$$(*)\quad \int dV'\left(\phi\Delta'\psi + \nabla'\phi\cdot\nabla'\psi\right) = \oiint d\vec A\cdot(\vec\nabla'\psi)\,\phi$$

1. Greensche Identität

analog: ϕ und ψ tauschen

$$(**)\quad \int dV'\left(\psi\Delta'\phi + \nabla'\phi\cdot\nabla'\psi\right) = \oiint d\vec A\cdot\nabla'\phi\,\psi$$

(*) − (**) gilt 2. Greensche Identität:

$$\psi(\vec r) \equiv \int dV'\left(\phi\Delta'\psi - \psi\Delta'\phi\right) = \oiint dA'\cdot\left(\phi\nabla'\psi - \psi\nabla'\phi\right)$$

dann

ψ : gesuchte Feldkomponente

Parameter

ϕ : Greensche Funktion $\phi(\vec r\,') = G(\vec r, \vec r\,')$

wenn

⋮

$\to$ <u>Beweis:</u> $\int dV' \Big(G(\vec r, \vec r')\, \underbrace{\Delta' \psi(\vec r')}_{\text{Wellengleichung}} - \psi(\vec r')\, \underbrace{\Delta' G(\vec r, \vec r')}_{\text{Def.-Gleichung } G(\vec r, \vec r')} \Big)$

$$= \int dV' G(\vec r, \vec r') \cdot \left(-k^2 \psi(\vec r')\right) - \psi(\vec r')\left(-\delta(\vec r - \vec r') - k^2 G(\vec r, \vec r')\right)$$

$$= \int dV' \psi(\vec r')\, \delta(\vec r - \vec r') = \psi(\vec r)$$

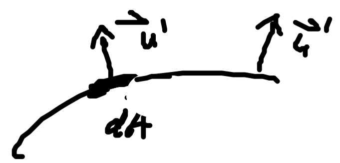
$d\vec A' = \vec n' dA$

$$\rightsquigarrow \quad \psi(\vec r) = \oiint_{S_1+S_2} dA' \left\{ G(\vec r, \vec r')\, \vec n' \cdot \vec\nabla' \psi(\vec r') - \psi(\vec r')\left(\vec n' \cdot \vec\nabla'\right) G(\vec r, \vec r') \right\}$$

implizite Gl. f. $\psi(\vec r)$

$\vec n'$ ist der Normalenvektor an OF $S_1 + S_2$

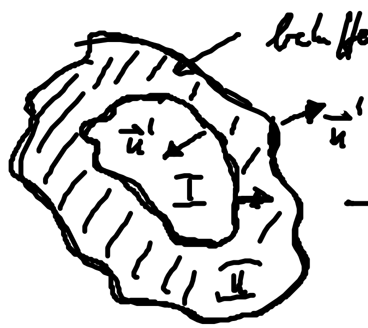
$\vec n' = \vec n'(\vec r')$



a) $$G(\vec r, \vec r') = \frac{e^{ik|\vec r - \vec r'|}}{|\vec r - \vec r'|\, 4\pi}$$ aus Theorie f. retardierte Potentiale, um 4π korrigiert

Einsetzen

b)



$\to$ n' soll jeweils nach außen von I zeigen

c) $\oiint_{S_2} \to 0$ verschwindet im Fernfeld

$S_2 \to \infty$

$\downarrow$

$$\psi(\vec r) = \overset{(b)}{-}\oiint_{\underset{(c)}{S_1}} dA' \left(\underset{(a)}{\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}} (\vec n'\cdot\vec\nabla')\psi(\vec r') - \psi(\vec r')(\vec n'\cdot\vec\nabla')\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}\right)$$

ausführen

$$\vec n'\cdot\vec\nabla' \, \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$$ und Produktregel

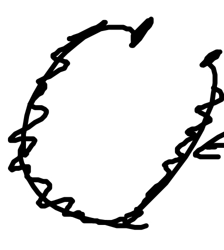
$$\psi(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\oiint_{S_1} dA' \, \frac{e^{ikR}}{R}\, \vec n'\cdot\left(\vec\nabla'\psi(\vec r') + ik\Big(1+\underset{*}{\frac{i}{kR}}\Big)\frac{\vec R}{R}\psi(\vec r')\right)$$

$$\left(\vec R = \vec r - \vec r'\right)$$

ab jetzt Kirchhoffsche Annahmen:

a) Fernfeldannahme $(*) \to 0$

b) $\psi(\vec r') = 0 = \underbrace{\partial_{n'}\psi(\vec r')}_{\vec n'\cdot\vec\nabla'\psi(\vec r)}$ außerhalb Öffnung in Schirm S_1



$\leftarrow$ Feld + Normalableitung $\to 0$

c/ $\underbrace{\Psi(\vec{r}\,'),\ \partial_{n'}\Psi(\vec{r}\,')}_{\text{auf den Öffnungen}}$ = Werte d. Felds das störungsfrei von Quelle kommt. (Bornnäherg.)

- Kirchhoffsche Annahmen sind spekulativ, aber genial weil sie oft zu richtig. Ergebnis führen obwohl sie inkonsistent sind
- Reparatur: durch modifizierte G und Vektorbeugung

d/ $kR = k|\vec{r}-\vec{r}\,'|$

Fernfeldentwicklg. im Exponent e^{ikR}

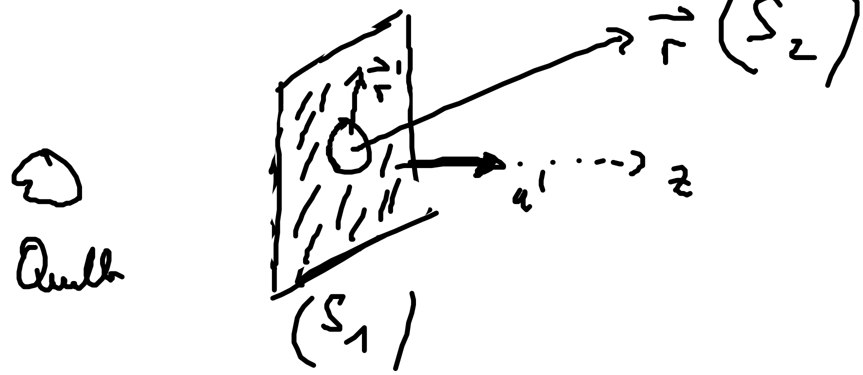
$$kR \approx \underbrace{\underbrace{kr - k\vec{r}\,'\cdot\vec{e}_r}_{\text{Fraunhoferbeugg.}} + \text{Korrekturterme}}_{\text{Fresnelbeugung}}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{e}_r$$

$$\Psi(\vec{r}) = -\underbrace{\frac{e^{ikr}}{4\pi r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\oint_{S_1}}_{\substack{\text{nur über}\\ \text{die Öffnung d}\\ \text{Apertur}}} dA\, \underbrace{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}\,'}}_{\substack{\text{Fraunhofer-}\\ \text{beugg bestimmt geometrie faktor}}} \left(\vec{n}\,'\cdot\vec{\nabla}\,'\underbrace{\Psi_0(\vec{r}\,') + i\vec{k}\cdot\vec{n}\,'\Psi_0(\vec{r}\,')}_{\text{angelegtes d. Feld in Apertur } \Psi_0}\right)$$

Formel f. Fraunhoferbeugung

12.4. Beugung d. Kreisapertur



einfallendes Feld: $\psi_0(\vec r') = E_0\, e^{ikz'}\big|_{z'=0}$ ← auf Schirm

$$\vec n' \cdot \nabla' \psi_0(\vec r') = ik E_0\, e^{ikz'}\big|_{z'=0}$$

$$\psi(\vec r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d\varphi' \int d\rho' \rho'\, e^{i\vec k \cdot \vec r'}\, E_0 \left(ik + i\vec k \cdot \vec e_z\right)$$

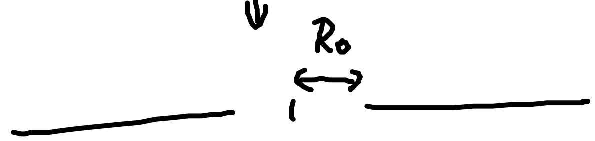
f. $\vec r$ auf Kugelkoordinaten (R_0 – Öffnungsradius)

$\downarrow$ ÜA

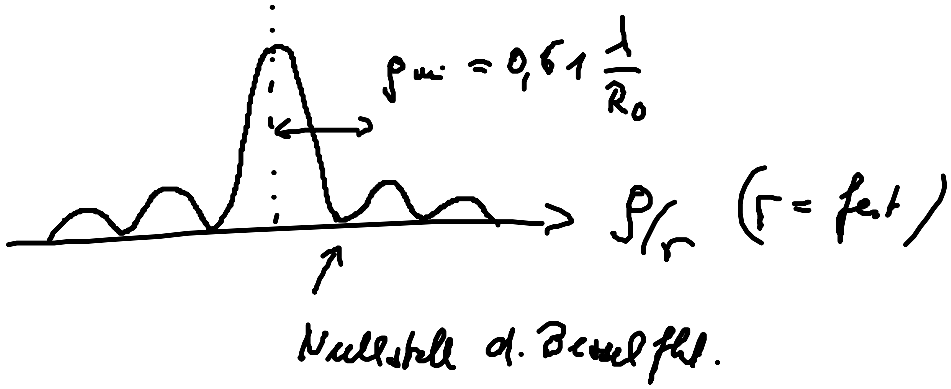
Besselfunktion

$$\psi(\vec r) = -i\, \frac{k E_0 R_0^2 e^{ikr}}{r}\, \frac{(1+\cos\vartheta)}{2}\, \frac{J_1(kR_0 \sin\vartheta)}{kR_0 \sin\vartheta}$$

$\downarrow$ ebene Welle



$\hat{=}\, |\psi(\vec r)|^2$



typische Wellen-Theorie gut f. $\lambda \sim R_0 \to$ Oszillationen

geometrische Optik: $R_0 \gg \lambda \to$ Oszillationen zerfallen

<u>Theorie geht nicht:</u> $\lambda \gg R_0$

Auflösungsgrenze d. Mikroskop

$$\Delta\rho = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} r = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} \rho \geq \underline{\underline{0{,}61 \lambda}}$$

um 2 Pkte aufzulösen

$r \approx$ Brennweite