Rayleigh-Streuung: elastische Streuung (energieerhaltend) von elektromagn. Welle an Teilchen
(typischerweise: $\lambda \gg$ Ausdehnung d. Teilchen)

Streuformel

$$\text{Streuquerschnitt } S = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left| \int d^3r' \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'} \, \vec{e}_0 \cdot \vec{e} \, \delta\varepsilon(\vec{r}') \right|^2$$

eingestellt — Detektion

$ck = \omega$

Volumenintegral über alle Streuer

$\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}_0$

detektierte Lichtrichtg. — eingestrahlte Richtg.

ε-Variation aufgrund der Streuer

12.2. Rayleigh-Streuung an Punktdipolen

Beispiel f. Streuung in Gasen

Bestimmung v. $\delta\varepsilon(\vec{r})$

$$(*) \quad \vec{P}_\omega = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)\, \vec{d}_j(\omega) = \sum_j \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)\, \varepsilon_0 \alpha_j(\omega) E_\omega(\vec{r}_j)$$

Summe über alle Dipole

Raumposition ein Dipoles

j-te Dipol am Ort $\vec{r}_j$

Polarisierbarkeit d. j-ten Moleküls

$\delta\varepsilon(\vec{r}) = ?$

$$\vec D_\omega = \varepsilon_0 \varepsilon \vec E_\omega = \varepsilon_0 \vec E_\omega + \vec P_\omega \longrightarrow \underbrace{\varepsilon_0 \underbrace{(\varepsilon - 1)}_{\delta\varepsilon} \vec E_\omega = \vec P_\omega}_{\text{Vergleich mit der Gl. (*)}}$$

$$\delta\varepsilon = \sum_j \delta(\vec r - \vec r_j)\, \alpha_j(\omega) \equiv \delta\varepsilon(\vec r)$$

einsetzen in den Streuquerschnitt HS für identische Moleküle $\alpha_j \equiv \alpha_0$

$$S = \frac{k^4}{16\pi^2} \left|\vec e_0 \cdot \vec e\,\right|^2 |\alpha_0(\omega)|^2 \underbrace{\left|\sum_j e^{i\vec q \cdot \vec r_j}\right|^2}_{\text{Form- bzw. Strukturfaktor}}$$

interessant: $S = S(\omega)$

$$S \sim \omega^4 \, |\alpha_0(\omega)|^2 \, F(\vec q = \underbrace{\vec k}_{\text{auch } \omega} - \vec k_0)$$

<u>einfachste Annahme:</u>

$\alpha_0(\omega) \equiv \alpha_0$, d.h. keine Resonanzen

Strukturfaktor: $$F(\vec q) = \left|\sum_j e^{i\vec q \cdot \vec r}\right|^2 = \sum_{i,j} e^{i\vec q \cdot (\vec r_i - \vec r_j)}$$

$$= \underbrace{\sum_{j \neq i} e^{i\vec q (\vec r_i - \vec r_j)}} + \underbrace{\sum_i 1}$$

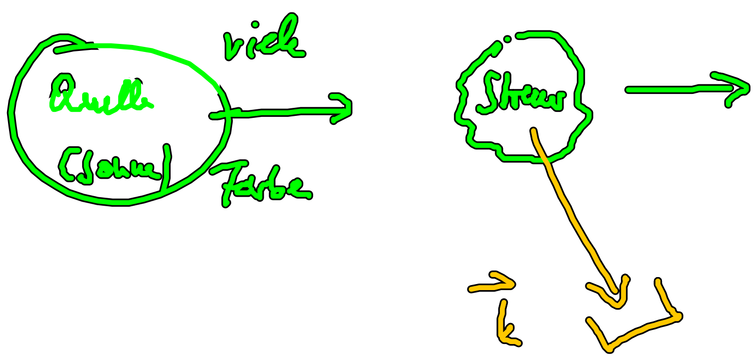
≈ 0 Gesamtmolekülzahl N

f. zufällig verteilte Moleküle : $\int_0^{2\pi} d\varphi \, e^{i\varphi} \to 0$

Es verbleibt die einfache angl. Frequenzabhängigkeit:

$$S \sim k^4 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4$$

$$S \sim \omega^4$$



in Transmission wird dann rotes Licht verstärkt wahrgenommen (Abendrot)

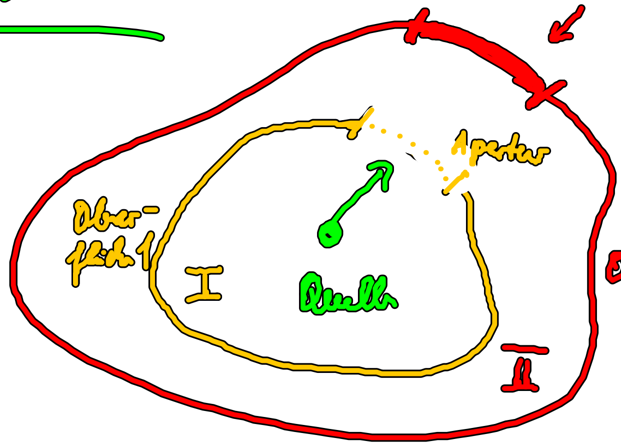
Licht, das nicht direkt v. Sonne kommt sondern als Streulicht wahrgenommen wird, zeigt eine Präferenz f. kurze Wellenlängen. (Himmelsblau)

12.3. Skalare Beugungstheorie

Beugung (engere Definition):

Wechselwirkung v. Welle mit Aperturen, typischer Öffnung $a \gg \lambda$

typische Situation



Feldverteilung ist gesucht auf Schirm S_2 „Beugungsbild"

Oberfläche 2: i.a. im Fernfeld

Maxwellgl. in Volumen mit Randbedingungen $\hat{=}$ ordentlicher Zugang

Vektorbeugungstheorie

im Gegensatz dazu: skalare Beugungstheorie

$$\left(\Delta + \underbrace{k^2}_{\frac{\omega^2}{c^2}}\right)\underbrace{\Psi(\vec{r})}_{\text{Feldkomponente}} = 0 \qquad \text{f. 1 feste Frequenz}$$

Greensche Funktion: $(\Delta + k^2)\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

(ohne 4π definiert)

Frage: $\Psi(\vec{r})\Big|_{S_2} = \oiint_{S_1} d\vec{A} \cdot \ldots$

kann man $\Psi(\vec{r})$ das auf S_2 beobachtet wird durch ein Oberflächenintegral über S_1 (abhängend Geometrie) darstellen?

dazu: Greensche Identitäten, $\vec C(\vec r')$ sei gutartiges Vektorfeld

$$\int_{V} dV' \, \nabla' \cdot \vec C(\vec r') = \oiint_{S_1+S_2} d\vec A' \cdot \vec C(\vec r') \qquad \text{(Gauß)}$$

mit $\vec C = \phi \nabla \psi$: $\phi, \psi \mathrel{\hat=}$ beliebige Felder, Skalar

$$\vec\nabla \cdot \vec C = \phi \Delta \psi + \vec\nabla \phi \cdot \vec\nabla \psi$$

$$(*) \quad \int dV' \left(\phi \Delta' \psi + \nabla' \phi \cdot \nabla' \psi \right) = \oiint d\vec A \cdot (\vec\nabla' \psi)\, \phi$$

1. Greensche Identität

analog: ϕ und ψ tauschen

$$(**) \quad \int dV' \left(\psi \Delta' \phi + \nabla' \phi \cdot \nabla' \psi \right) = \oiint d\vec A \cdot \nabla' \phi \, \psi$$

$(*) - (**)$ gilt 2. Greensche Identität:

$$\psi(\vec r) \equiv \int dV' \left(\phi \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi \right) = \oiint dA' \cdot \left(\phi \nabla' \psi - \psi \nabla' \phi \right)$$

ψ : gesuchte Feldkomponente

ϕ : Greensche Funktion $\phi(\vec r') = G(\vec r, \vec r')$ — Parameter

weiter

⋮

⋮ → **Beweis:** $\int dV' \Big(G(\vec r,\vec r')\underbrace{\Delta' \Psi(\vec r')}_{\text{Wellengleichg.}} - \Psi(\vec r')\underbrace{\Delta' G(\vec r,\vec r')}_{\text{Def.gleichg. } G(\vec r,\vec r')}\Big)$

$$= \int dV'\, G(\vec r,\vec r')\cdot\left(-k^2\Psi(\vec r')\right) - \Psi(\vec r')\left(-\delta(\vec r-\vec r') - k^2 G(\vec r,\vec r')\right)$$

$$= \int dV'\, \Psi(\vec r')\,\delta(\vec r-\vec r') = \Psi(\vec r)$$

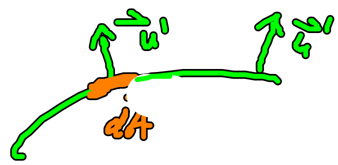
$d\vec A' = \vec n' dA$

$$\Rightarrow \Psi(\vec r) = \oiint_{S_1+S_2} dA' \left\{ G(\vec r,\vec r')\,\vec n'\cdot\vec\nabla'\,\Psi(\vec r') - \Psi(\vec r')(\vec n'\cdot\vec\nabla')\,G(\vec r,\vec r')\right\}$$

implizite Gl. f. $\Psi(\vec r)$

$\vec n'$ ist der Normalenvektor an OF S_1+S_2

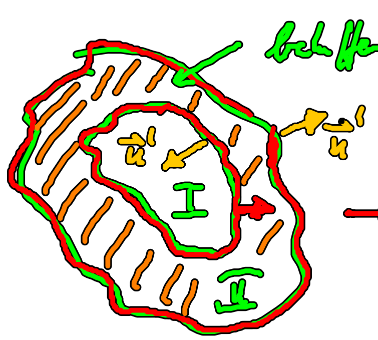
$\vec n' = \vec n'(\vec r')$



a) $G(\vec r,\vec r') = \dfrac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|\,4\pi}$ ← aus Theorie f. retardierte Potentiale, um 4π korrigiert

Einsetzen

betreffendes Gebiet

b) 

→ $\vec n'$ soll jetzt nach außen von I zeigen

c) $\oiint_{S_2} \to 0$ verschwindet im Fernfeld

$S_2 \to \infty$

$$\psi(\vec r) = -\underset{S_1}{\oint\!\!\oint} dA' \left(\underbrace{\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}}_{(a)} (\vec n'\cdot\vec\nabla')\psi(\vec r') - \psi(\vec r')(\vec n'\cdot\vec\nabla')\frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|} \right)$$

(b) (c) (a)

ausführen

$$\vec n'\cdot\vec\nabla' \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{4\pi|\vec r-\vec r'|}$$ und Produktregel

$$\psi(\vec r) = -\frac{1}{4\pi}\underset{S_1}{\oint\!\!\oint} dA' \frac{e^{ikR}}{R}\, \vec n'\cdot\left(\vec\nabla'\psi(\vec r') + ik\left(1+\frac{i}{kR}\right)\frac{\vec R}{R}\psi(\vec r')\right)$$

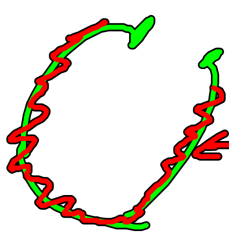
$(*)$

$$\left(\vec R = \vec r - \vec r'\right)$$

ab jetzt Kirchhoffsche Annahme:

a) Fernfeldannahme $(*) \to 0$

b) $\psi(\vec r') = 0 = \underbrace{\partial_{n'}\psi(\vec r')}_{\vec n'\cdot\vec\nabla'\psi(\vec r)}$ außerhalb Öffnung in Schirm S_1



Feld + Normalableitung $\to 0$

c/ $\underbrace{\Psi(\vec r\,'),\ \partial_{n'}\Psi(\vec r\,')}_{\text{auf den Öffnungen}}$ = Werte d. Felds das störungsfrei von Quelle kommt. (Bornnäherung.)

- Kirchhoffsche Annahmen sind spekulativ, aber gemacht weil sie oft zu richtigen Ergebnissen führen obwohl sie inkonsistent sind
- Reparatur: durch modifizierte G und Vektorbeugung

d/ $kR = k|\vec r - \vec r\,'|$

Fernfeldentwicklg. im Exponent e^{ikR}

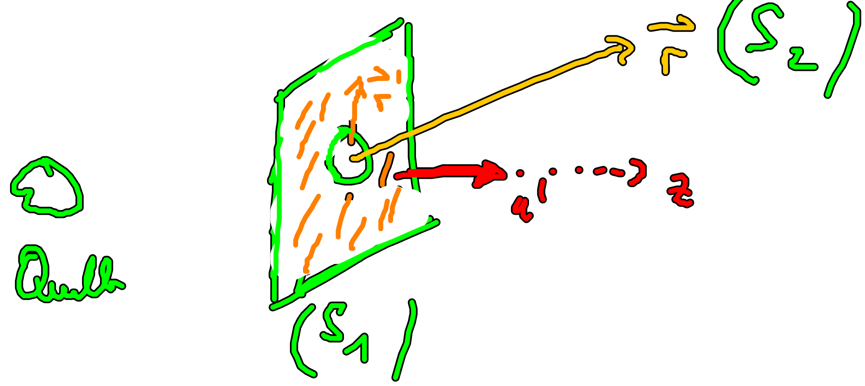
$$kR \approx \underbrace{\underbrace{kr - k\vec r\,'\cdot\vec e_r}_{\text{Fraunhoferbeugg.}} + \text{Korrekturterme}}_{\text{Fresnelbeugung}}$$

$\vec k = \frac{\omega}{c}\vec e_r$

$$\Psi(\vec r) = -\underbrace{\frac{e^{ikr}}{4\pi r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\oint\!\!\!\oint_{S_1}}_{\text{nur über die Öffnung d. Apertur}} dA\, \underbrace{e^{i\vec k\cdot\vec r\,'}}_{\text{Fraunhofer-beugg bestimmt Geometriefaktor}} \left(\underbrace{\vec n\,'\cdot\vec\nabla'\Psi_0(\vec r\,') + i\vec k\cdot\vec n\,'\Psi_0(\vec r\,')}_{\text{ausgeschnitten d. Feld in Apertur } \Psi_0}\right)$$

Formel f. Fraunhoferbeugung

12.4. Beugung d. Kreisapertur



einfallendes Feld: $\psi_0(\vec r') = E_0 e^{ikz'}\big|_{z'=0}$ ← auf Schirm

$$\vec n' \cdot \nabla' \psi_0(\vec r') = ik E_0 e^{ikz'}\big|_{z'=0}$$

$$\psi(\vec r) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}\int d\varphi' \int d\rho' \rho' e^{i\vec k \cdot \vec r'} E_0 \left(ik + i\vec k \cdot \vec e_z\right)$$

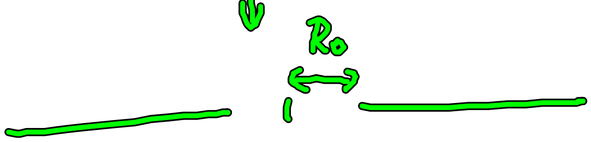
f. $\vec r$ auf Kugelkoordinaten (R_0 – Öffnungsradius)

↓ ÜA

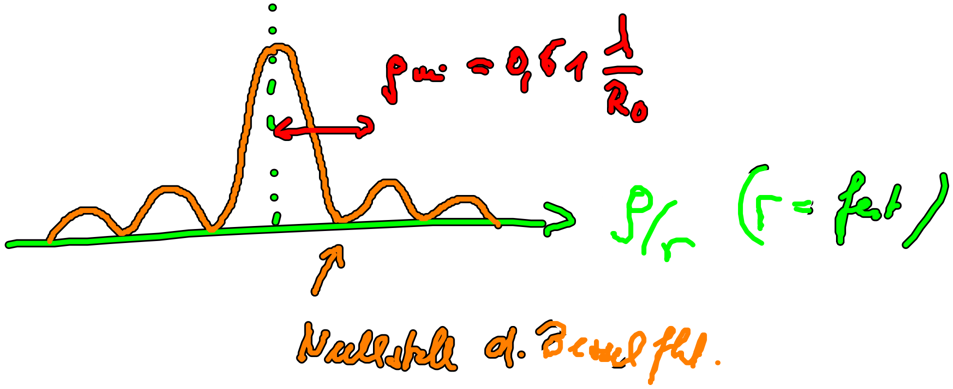
Besselfunktion

$$\psi(\vec r) = -i\,\frac{kE_0 R_0^2 e^{ikr}}{r}\,\frac{(1+\cos\vartheta)}{2}\,\frac{J_1(kR_0\sin\vartheta)}{kR_0\sin\vartheta}$$

↓ ebene Welle



$\hat{=}\ |\psi(\vec r)|^2$



typisch Wellen Theorie gut f. $\lambda \sim R_0$ $\rightarrow$ Oszillation

geometrische Optik! $R_0 \gg \lambda$ $\rightarrow$ Oszillation zerfallen

<u>Theorie geht nicht:</u> $\lambda \gg R_0$

Auflösungsgrenze d. Mikroskop

$$\Delta\rho = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} r = 0{,}61 \frac{\lambda}{R_0} f \geq \underline{\underline{0{,}61 \lambda}}$$

um 2 Pkte aufzulösen

$r \approx$ Brennweite