Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

1. Motivation

Die Quellen in der Maxwellgleichung hängen von der Bewegung des Beobachters ab (Ladungsdichte ρ, vs. Strom $\vec{j}$). Klassische Mechanik ist Gallilei-invariant, wie sieht es mit Relativistik in der Elektrodynamik aus?

Startpunkt Wellengleichung

Gallileitransformation

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v} \cdot t$$

$$t' = t$$

Wellengl.

und $\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = 0$

$$\Rightarrow \left\| \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \underline{v} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \cdot \nabla \right) \psi = 0 \right\|$$

Benutze

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla$$

Offensichtlich ist die Wellengleichung nicht forminvariant unter Gallileitransformationen

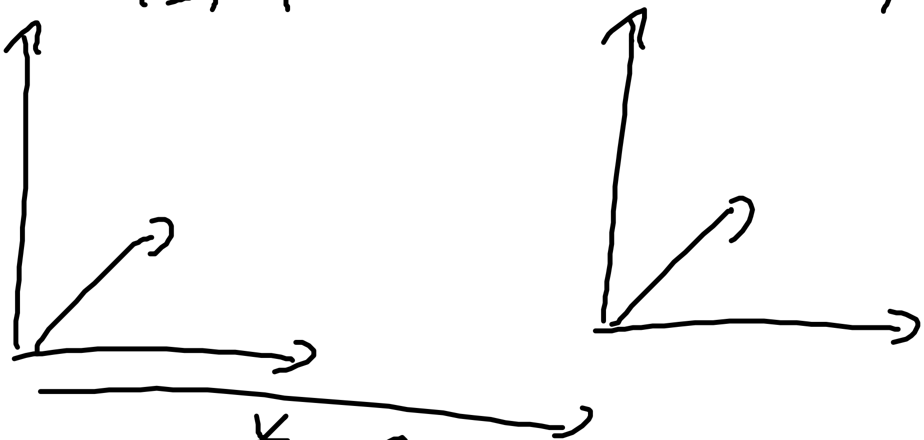
Vielleicht gehorcht die Elektrodynamik von vorneherein der speziellen Relativitätstheorie?

$\Longrightarrow$ Ziel kompatible Formulierung von rel. Mechanik und Elektrodynamik!

2. Wiederholung relativistische Mechanik

Inertialsysteme: gleichförmig bewegte Bezugssysteme

$\Sigma = \{\underline{r}, t\}$ $\qquad$ $\Sigma' = (\underline{r}', t')$ $\qquad$ $t \neq t'$



gleichförmige Bewegung

- Transformation zwischen beiden Systemen durch Lorentztransformation (LT)
- Entscheidende Annahme der Lorentztrafo: Abstände in der Raumzeit sind konstant!

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2, \qquad \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta s'^2 = \Delta s^2$$

- Transformation hält „Länge" konstant ⇒ Eigenschaft einer Drehung in 4D
  Dies folgt aus der Forderung, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen konstant ist. (Gleiche Physikalische Gesetze)
  Minkowski-Norm ist Lorentzinvariant. (Lorentzskalar)
  Orts- und Zeitabstand ist <u>nicht</u> Lorentzinvariant.
- Beschreibung mittels Vierer-Vektoren (ct und $\underline{r}$ gleichrangig), die mittels LT zwischen Bezugssystem transformiert werden

<u>Beispiel aus der speziellen Relativitätstheorie</u>

kontravariante Vierervektor x^μ

$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$; $x^\mu = (x^0, \underline{r}) = (ct, x, y, z)$

Unterscheidung der Koordinaten

griechische Indices : Raum-Zeit Koordinaten (μ)
lateinische Indices : Raumkoordinate

Die Minkowski Norm Δs^2 bleibt bei Wechsel des Koordinatensystems konstant.

Metrische Tensor ist hilfreich zur Definition des Minkowskiproduktes:

$g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ und $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$ $g_{00} = +1$

Norm $\|s^2 = \sum_{\mu\nu} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = c^2t^2 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3\|$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der kovariante eingeführt:

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, \underline{r})$$

$\Rightarrow$ kompakte Schreibweise des Skalarproduktes:

$$s^2 = \sum_\mu x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 = c^2t^2 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$$

(Einstein'sche Summenkonvention, falls ein Index __einmal__ unten und oben (ko- und kontravariant) auftaucht so wird über den Index summiert.

__Wiederholung Lorentztransformation__

Allgemein kann LT als Matrix zwischen den Koordinaten von Σ, Σ' aufgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ $\leftarrow$ kontravariante Vektoren

Beispiel: für LT für Bewegung in x-Richtung

$$\beta = \frac{v_x}{c}, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \frac{v_x}{c} x\right) \\ x' &= \gamma\left(-v_x t + x\right) \end{aligned}$$

kontravariante Vektor

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu}$$

Die kovarianten Vektoren:

$$x'_{\mu} = \omega^{\nu}_{\ \mu}\, x_{\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = \omega^{\nu}_{\ \mu}$$

$$\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung $\quad \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, \omega^{\lambda}_{\ \mu} = \delta^{\lambda}_{\ \nu} \Leftarrow$ Wichtiges Kennzeichen dass die Transformation die Minkowski invariant lässt.

z.B. Eintrag (0,0): $\quad \delta^{0}_{0} = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$

Bem:
Die klassische Mechanik ist nur Galilei invariant, die Anwendung der klassischen Mechanik ohne Modifikationen (z.B. Geschwindigkeitsabhängige Masse) kann zu Paradoxien führen!
Zur Übertragung der LT auf die Elektrodynamik müssen wir uns klar werden wie sich die verschied. Größen der ED transformieren:

Transformation verschiedener Größen:

a) Vierervektor: x^μ wird über LT transformiert $x'^\mu = \Omega^\mu_{\ \nu} x^\nu$ bei Wechsel der Inertialsystem ($\Sigma \to \Sigma'$) um Konstanz von c zu gewährleisten.

(Bemerkung: $\Omega^\mu_{\ \nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$)

Allgemein nennt man jeden Vektor mit 4 Komponenten
$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ ein Vierervektor
falls bei Wechsel des Koordinatensystem gilt

$$A'^\mu = \Omega^\mu_{\ \nu} A^\nu$$

b) Lorentzskalar: Ein Skalar der invariant unter LT ist heißt Lorentzskalar!

Beispiel: Norm von Vierervektoren

$$A^\mu A_\mu = \Omega^\mu{}_\nu A'^\nu \omega^\alpha{}_\mu A'_\alpha = \underbrace{\Omega^\mu{}_\nu \omega^\alpha{}_\mu}_{\delta_{\nu\alpha}} A'^\nu A'_\alpha$$

$$= A'^\nu A'_\nu$$

Aus der Erfahrung (Experiment) ist die Gesamtladung eines System erhalten $\Rightarrow$ muß Lorentzskalar sein

c) kontravarianter Tensor

Eine Matrix, die sich unter LT wie $x^\mu x^\nu$ verhält, heißt kontravarianter Tensor

$$F'^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\alpha \Omega^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

(Jeder Eintrag der Matrix wird über LT transformiert)

Frage: Wie verhalten sich die Größen in der Elektrodynamik?

Beginn mit Quellen der Maxwellgl.:

Ströme und Ladungen (Verbindung zur Materie)!

ρ und $\vec{j}$?

Was mit Ableitung nach Ort oder Zeit?

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \omega_\alpha{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu}$$

$$\omega^{\nu'}_{\ \mu} x'^{\mu} = \underbrace{\omega^{\nu'}_{\ \mu} \Omega^{\mu}_{\ \nu}}_{\delta_{\nu'\nu}} x^{\nu} = x^{\nu'} \Rightarrow \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\mu}} = \omega^{\nu'}_{\ \mu}$$

$\Rightarrow$ Differentierung nach kontravarianten Komponente transformiert sich wie ein kovarianter Vektor!

Analog $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \Omega^{\beta}_{\ \alpha} \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}$

Kontinuitätsgleichung: (soll in allen Inertialsystem gelten)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t'} \rho' + \nabla' \cdot \vec{j}' = 0$$

TODO: Formulierung über Vierervektor

$$J^{\alpha} = (c\rho, \vec{j}), \quad \text{Viererstrom}$$

Bemerkung: $\partial^{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right)_{\alpha}$ und $\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right)_{\alpha}$

$\Rightarrow$ Umschreiben der Kontigl.

$$\Rightarrow \frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \sum_i \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

$\Rightarrow \| \partial_{\alpha} J^{\alpha} = 0 \|$ Kontinuitätsgl. in Vierer schreibweise

1.) ∂_{μ} ist Vierervektor, schon gezeigt (oben)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Omega^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

also wird ∂_μ wie x^μ transformiert ist also Vierveltor.

2.) Die Stromdichte sollte auch ein Vierveltor sein, damit Kontigleichung LT invariant ist.

$$\partial'_\mu j^\mu(x') \underset{\uparrow}{=} \partial'_\mu \left(\Omega^\mu{}_\nu j^\nu(x)\right) = \Omega^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} j^\nu(x)$$

Annahme j ist Vierveltor

$$= \Omega^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\nu(x)$$

$$= \underbrace{\Omega^\mu{}_\nu w^\alpha{}_\mu}_{\delta^\alpha_\nu} \partial_\alpha j^\nu(x) = \delta^\alpha_\nu \partial_\alpha j^\nu(x)$$

$$= \partial_\nu j^\nu(x)$$

Invarianz gezeigt!

Um dass zu Begründen, machen wir uns klar:

$$\delta q = \rho \, d^3x \quad \text{Ladung im Volumen}$$

Ist Ladung invariant, so muss

$$\rho' d^3x' = \rho \, d^3x$$ gelten! (experimentelle Invarianz)

Das vierdimensionale Volumenelement ist Lorentzinvariant

$$d^4x' = \det \Omega \, d^4x = d^4x$$

Daher gilt

$$\rho' d^3x = \rho d^3x,$$ dass sich $c\rho$ wie x^0 transformieren muß!

<u>Analogien:</u> relativistische Mechanik $\Longleftrightarrow$ Elektrodynamik

$$x^\mu = (ct, \underline{r}) \Leftrightarrow j^\mu = (c\rho, \underline{j})$$

$$t \longleftrightarrow \rho$$

$$\underline{v} \longleftrightarrow \underline{j}$$

$$x' = (x - v_x t)\gamma \longleftrightarrow j' = (j_x - v_x \rho)\gamma$$

$$ct' = \left(ct - \frac{v_x}{c} x\right) \longleftrightarrow c\rho' = \left(c\rho - \frac{v_x}{c} j_x\right)\gamma$$

$\Rightarrow$ Strom und Ladungsdichte mischen in Abhängigkeit des Bewegungszustands des Beobachters)
(Sie sind jeweils für sich keine Invarianten unter LT!)

Da $\underline{j}$ und ρ die Quellen von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ Feld sind, muß $\underline{E}$ und $\underline{B}$-Feld ähnlich verhalten!

Ziel: Auch Maxwellgl. mit <u>Vierervektoren</u>-formuliert!