Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

1. Motivation

Die Quellen in der Maxwellgleichung hängen von der Bewegung des Beobachters ab (Ladungsdichte ρ, vs. Strom $\vec{j}$). Klassische Mechanik ist Gallilei-invariant, wie sieht es mit Relativistik in der Elektrodynamik aus?

Startpunkt Wellengleichung

Gallileitransformation

$$\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v} \cdot t$$

$$t' = t$$

und Wellengl.

$$\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \psi = 0$$

$$\Rightarrow \left\| \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2}{c^2} \underline{v} \cdot \nabla \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \underline{v} \cdot \nabla \, \underline{v} \cdot \nabla \right) \psi = 0 \right\|$$

Benutze

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla$$

Offensichtlich ist die Wellengleichung nicht forminvariant unter Gallileitransformationen

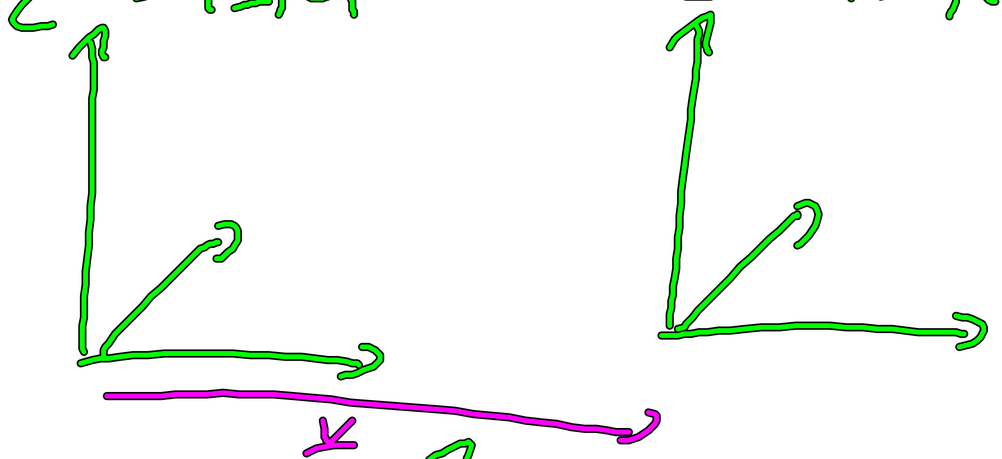
Vielleicht gehorcht die Elektrodynamik von vorneherein der speziellen Relativitätstheorie?

$\Longrightarrow$ Ziel kompatible Formulierung von rel. Mechanik und Elektrodynamik!

2. Wiederholung relativistische Mechanik

Inertialsysteme: gleichförmig bewegte Bezugssysteme

$\Sigma = \{\underline{r}, t\}$ $\qquad$ $\Sigma' = (\underline{r}', t')$ $\qquad$ $t \neq t'$



gleichförmige Bewegung

- Transformation zwischen beiden Systemen durch Lorentztransformation (LT)
- Entscheidende Annahme der Lorentztrafo: Abstände in der Raumzeit sind konstant!

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta r^2, \qquad \Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta r'^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \Delta s'^2 = \Delta s^2$$

- Transformation hält „Länge" konstant ⇒ Eigenschaft einer Drehung in 4D
  Dies folgt aus der Forderung, dass die Vakuumlichtgeschwindigkeit in allen Bezugssystemen konstant ist. (Gleiche Physikalische Gesetze)
  Minkowski-Norm ist Lorentzinvariant. (Lorentzskalar)
  Orts- und Zeitabstand ist nicht Lorentzinvariant.
- Beschreibung mittels Vierer-Vektoren (ct und $\underline{x}$ gleichrangig), die mittels LT zwischen Bezugssystemen transformiert werden

Beispiel aus der speziellen Relativitätstheorie

kontravariante Vierervektoren x^μ

$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$; $x^\mu = (x^0, \underline{r}) = (ct, x, y, z)$

Unterscheidung der Koordinaten

griechische Indices : Raum-Zeit Koordinaten (μ)
lateinische Indices : Raumkoordinaten

Die Minkowski Norm Δs^2 bleibt bei Wechsel des Koordinatensystems konstant.

Metrische Tensor ist hilfreich zur Definition des Minkowskiproduktes:

$g_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$ und $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{00} = +1$

Norm $\| s^2 = \sum_{\mu\nu} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = c^2t^2 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3 \|$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der kovariante eingeführt:

$$x_\mu = \sum_\nu g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, \underline{r})$$

$\Rightarrow$ kompakte Schreibweise des Skalarproduktes:

$$s^2 = \sum_\mu x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 = c^2t^2 - x^1x^1 - x^2x^2 - x^3x^3$$

(Einstein'sche Summenkonvention, falls ein Index <u>einmal</u> unten und oben (ko- und kontravariant) auftaucht, so wird über den Index summiert.

<u>Wiederholung Lorentztransformation</u>

Allgemein kann LT als Matrix zwischen den Koordinaten von Σ, Σ' aufgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underline{\underline{\Lambda}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leftarrow \text{kontravariante Vektoren}$$

Beispiel: für LT für Bewegung in x-Richtung

$$\beta = \frac{v_x}{c}, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} ct' = \gamma\left(ct - \frac{v_x}{c} x\right) \\ x' = \gamma\left(-v_x t + x\right) \end{array} \right\|$$

kontravariante Vektor

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, x^{\nu}.$$

Die kovariante Vektoren :

$$x'_{\mu} = w^{\nu}_{\ \mu}\, x_{\nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial x'_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = w^{\nu}_{\mu}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerke

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu}\, w^{\lambda}_{\ \mu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \Leftarrow$$

Wichtiges Kennzeichen dass die Transformation die Minkowski invariant läßt.

z. B Eintrag $(0,0)$: $\delta^0_0 = \gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2} = 1$

Bem.: Die klassische Mechanik ist nur Galilei-invariant, die Anwendung der klassischen Mechanik ohne Modifikationen (z.B. Geschwindigkeitsabhängige Masse) kann zu Paradoxien führen!

Zur Übertragung der LT auf die Elektrodynamik müssen wir uns klar werden wie sich die verschiedenen Größen der ED transformieren:

Transformation verschiedener Größen:

a) **Vierervektor:** x^μ wird über LT transformiert $x'^\mu = \Omega^\mu_\nu x^\nu$ bei Wechsel der Inertialsystem ($\Sigma \to \Sigma'$) um Konstanz von c zu gewährleisten.

(Bemerkung: $\Omega^\mu_\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$)

Allgemein nennt man jeden Vektor mit 4 Komponenten

$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ ein Vierervektor

falls bei Wechsel des Koordinatensystem gilt

$$A'^\mu = \Omega^\mu_\nu A^\nu$$

b) **Lorentzskalar:** Ein Skalar der invariant unter LT ist heißt Lorentzskalar!

Beispiel: Norm von Vierervektoren

$$A^\mu A_\mu = \Omega^\mu{}_\nu A'^\nu w_\mu{}^\alpha A'_\alpha = \underbrace{\Omega^\mu{}_\nu w_\mu{}^\alpha}_{\delta_\nu{}^\alpha} A'^\nu A'_\alpha$$

$$= A'^\nu A'_\nu$$

Aus der Erfahrung (Experiment) ist die Gesamtladung eines Systems erhalten ⇒ muß Lorentzskalar sein

c) kontravarianter Tensor

Eine Matrix, die sich unter LT wie $x^\mu x^\nu$ verhält, heißt kontravarianter Tensor

$$F'^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\alpha \Omega^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

(Jeder Eintrag der Matrix wird über LT transformiert)

Frage: Wie verhalten sich die Größen in der Elektrodynamik?

Beginn mit Quellen der Maxwellgl.:

Ströme und Ladungen (Verbindung zu Modell)!

ρ und $\vec{j}$?

Was mit Ableitung nach Ort oder Zeit?

$$\frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = w_\alpha{}^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

$$x'^{\mu} = \Omega^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$\omega^{\nu'}{}_{\mu}\, x'^{\mu} = \underbrace{\omega^{\nu'}{}_{\mu}\,\Omega^{\mu}{}_{\nu}}_{\delta_{\nu'\nu}}\, x^{\nu} = x^{\nu'} \Rightarrow \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x'^{\mu}} = \omega^{\nu'}{}_{\mu}$$

$\Rightarrow$ Differentiation nach kontravarianten Komponenten transformiert sich wie ein kovarianter Vektor!

Analog $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \Omega^{\beta}{}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^{\beta}}$

Kontinuitätsgleichung: (soll in allen Inertialsystemen gelten)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot j = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t'}\rho' + \nabla'\cdot j' = 0$$

TODO: Formulierung über Vierervektor

$$J^{\alpha} = (c\rho, j), \quad \text{Viererstrom}$$

Bemerkung: $\partial^{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla\right)_{\alpha}$ und $\partial_{\alpha} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right)_{\alpha}$

$\Rightarrow$ Umschreiben der Kontigl.

$$\frac{\partial c\rho}{\partial ct} + \sum_i \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0$$

$\Rightarrow \| \partial_{\alpha} J^{\alpha} = 0 \|$ Kontinuitätsgl. in Viererschreibweise

1.) ∂_{μ} ist Vierervektor, schon gezeigt (oben)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Omega^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

also wird ∂_μ wie x^μ transformiert, ist also Vierervektor.

2.) Die Stromdichte sollte auch ein Vierervektor sein, damit Kontinuitätsgleichung LT invariant ist.

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') \underset{\uparrow}{=} \partial'_\mu \left(\Omega^\mu{}_\nu j^\nu(x)\right) = \Omega^\mu{}_\nu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} j^\nu(x)$$

Annahme, j ist Vierervektor

$$= \Omega^\mu{}_\nu \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} j^\nu(x)$$

$$= \underbrace{\Omega^\mu{}_\nu\, \omega^\alpha{}_\mu}_{\delta^\alpha_\nu} \partial_\alpha j^\nu(x) = \delta^\alpha_\nu \partial_\alpha j^\nu(x)$$

$$= \partial_\nu j^\nu(x)$$

Invarianz gezeigt!

Um dies zu begründen, machen wir uns klar:

$\delta q = \rho\, d^3x$ Ladung im Volumelement

Ist Ladung invariant, so muss

$\rho' d^3x' = \rho\, d^3x$ gelten! (experimentelle Invarianz)

Das vierdimensionale Volumelement ist Lorentzinvariant

$$d^4x' = \det\Omega\, d^4x = d^4x$$

Daher gilt

$\rho' d^3x = \rho\, d^3x$, dass sich $c\rho$ wie x^0 transformieren muß!

<u>Analogien:</u> relativistische Mechanik $\Leftrightarrow$ Elektrodynamik

$$x^{\mu} = (ct, \underline{r}) \Leftrightarrow \underline{j}^{\mu} = (c\rho, \underline{j})$$

$$t \longleftrightarrow \rho$$

$$\underline{v} \longleftrightarrow \underline{j}$$

$$x' = (x - v_x t)\gamma \longleftrightarrow j' = (j_x - v_x \rho)\gamma$$

$$ct' = \left(ct - \frac{v_x}{c} x\right) \longleftrightarrow c\rho' = \left(c\rho - \frac{v_x}{c} j_x\right)\gamma$$

$\Rightarrow$ Strom und Ladungsdichte mischen in Abhängigkeit des Bewegungszustands des Beobachters)
(Sie sind jeweils für sich keine Invariante unter LT!)

Da $\underline{j}$ und ρ die Quellen von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ Feld sind, muß $\underline{E}$ und $\underline{B}$ – Feld ähnlich verhalten!

Ziel: Auch Maxwellgl. mit Vierervektor – formuliert!