Zusammenfassung letzte VL

Analogie rel. Mechanik $\longleftrightarrow$ Elektrodynamik

$$x^\mu = (ct, \underline{r}) \longleftrightarrow j^\mu = (c\rho, \underline{j})$$

$$t \longleftrightarrow \rho$$

$$\underline{r} \longleftrightarrow \underline{j}$$

$$x' = (x - v_x t)\gamma \longleftrightarrow j' = (j_x - v_x \rho)\gamma$$

$$ct' = (ct - \frac{v_x}{c} x) \longleftrightarrow c\rho' = (c\rho - \frac{v_x}{c} j_x)\gamma$$

Ansagen: Tutorien + Klausur s. Webseite

Das Viererpotential

Wenn E, B nicht Lorentzinvariant sind, dann sind es vermutlich die Potentiale A, φ auch nicht!

Betrachten wir die Gleichungen in Lorentzeichung

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{A} = 0\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \Delta\right)\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} - \Delta\right)}_{\text{Das ist der vierdimensionale Laplace (aka d'Alembert Operator)}} \underline{A} = \underline{j} \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^i = \mu_0 j^i$$

$$\Box \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \nabla^2$$, dieser ist Lorentzinvariant

Weil

$$\partial'_\alpha \partial'^\alpha = \Lambda^\nu{}_\alpha \partial_\nu \Lambda^\alpha{}_{\nu'} \partial^{\nu'} = \partial_\nu \partial^\nu \quad !$$

($\Lambda^\nu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'}$)

Zusätzlich gilt in jedem IS $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \nabla\cdot\underline{A} = 0\right.$, gefordert!

Beweis analog zur Kontigl.

Wir kombinieren dabei

$$A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, \underline{A}\right)$$

Bemerkung

$$j^\alpha = (c\rho, j^x, j^y, j^z)$$

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha}$$

Damit gelten die Potentialgleichungen in jedem Inertialsystem.

Es bleiben noch die Felder $\underline{E}$ und $\underline{B}$!

Feldtensor und Maxwellgl. in Viererschreibweise

$\underline{E}$ und $\underline{B}$ sind nicht Lorentzinvariant. Wir müssen eine neue Größe finden, die $\underline{E}$ und $\underline{B}$ beinhaltet und Lorentzinvariant ist!

Analogie: $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$$\| \quad F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \quad \|$$ Feldtensor

Zur Erinnerung $\partial^\mu = (\partial_{ct}, -\nabla)$ sowie $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \underline{A}\right)$

Was sind die Elemente von $F^{\mu\nu}$?

Beispiele

$$F^{10} = -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\phi}{c} + \frac{\partial}{\partial(ct)} A^x = -\frac{1}{c} E_x$$

$$F^{21} = -\partial^2 A^1 + \partial^1 A^2 = +\frac{\partial}{\partial y} A^x - \frac{\partial}{\partial x} A^y = -B_z$$

Ergo:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Der Feldstärketensor ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) ist antisymmetrisch

Er ist aus zwei Vierervektoren aufgebaut ∂^μ und A^ν und damit Lorentztensor

$$F^{\mu\nu} = \Omega^\mu{}_\alpha \Omega^\nu{}_\beta F'^{\alpha\beta}$$

Jetzt Maxwellgl. aus Potentialgleichung ableiten!

$$F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \qquad \Big|\, \partial_\mu \text{ (Summenkonvention)}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_{=0}$$ ← Lorenzeichung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -\mu_0 j^\nu$$

(Erinnerung: Potentialgl.
$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$)

$$\Big\| \, \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu \, \Big\|$$ Maxwellgl. in Vierschreibweise

Auswertung der einzelnen Komponenten ergibt:

$$\left\| \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \underline{B} &= \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} \end{aligned} \right\|$$ Maxwellgl.

Die anderen Maxwellgl. folgen aus (Jacobi Identität)

$$\Big\| \, \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \, \Big\|$$ (ohne Beweis)

bekannt aus Determinante

mit $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, (drei auswählen)

Daraus gibt es: $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

(im wesentlichen folgt dies aus der Verknüpfung von Potentialen und Feldern)

Wichtig: Die Aufteilung von $\underline{E}$ und $\underline{B}$ ist abhängig vom Bezugssyst. $\underline{E}$ und $\underline{B}$ werden zum „elektromagnetischen Feld" zusammengefaßt) und sind echte Einheit.
Der Lorentztensor $F^{\alpha\beta}$ stellt das elektromagnetische Feld dar, in einer Form die zwischen KS Lorentztransformierbar ist.

Wie transformieren sich die Felder?

Bis jetzt kennen wir als Transformationsregeln

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \rho} x^{\rho} \quad , \quad j'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\ \rho} j^{\rho}(x)$$

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\ \rho} A^{\rho}(x) \quad , \quad F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\ \rho} \Lambda^{\nu}_{\ \sigma} F^{\rho\sigma}(x)$$

Zur Erinnerung $\Sigma \to \Sigma'$ für Bewegung entlang einer Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta = \frac{v_x}{c}$$

Anwendung auf $F^{\rho\sigma}$ und $F'^{\rho\sigma}$

$E_x' = E_x$, $E_y' = \gamma(E_y - \beta c B_z)$, $E_z' = \gamma(E_z + \beta c B_y)$

$B_x' = B_x$, $B_y' = \gamma(B_y + \beta E_z/c)$, $B_z' = \gamma(B_z - \beta E_y/c)$

Wir sehen klar das magnetisch und elektrisches Feld von der Wahl des Beobachter abhängt.

Struktur von $F^{\mu\nu}$ vereinfacht Umrechnung.

Exkurs: Lagrange für relativistische Fall

Zur Erinnerung

$$\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma m v = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$$

Formulierung mit Potentialen

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$q\,\underline{v} \times \underline{B} = q\,\underline{v} \times (\nabla \times \underline{A})$$
$$= q\left(\nabla(\underline{v}\cdot\underline{A}) - (\underline{v}\cdot\nabla)\underline{A}\right)$$

Bemerkung: $\dfrac{dA(x)}{dt} = \underline{v}\cdot\nabla\underline{A} + \dfrac{\partial A}{\partial t}$

Feldimpuls

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\gamma m \underline{v} + q\underline{A})} = -q\nabla(\phi - \underline{v}\cdot\underline{A}) \qquad \#$$

$p(x,t)$ generalisierter Impuls

Beispiel

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\| L = -\frac{mc^2}{\gamma} - q\left(\phi - \underline{v}\cdot\underline{A}\right) \right\|$$ relativistische Lagrangefkt. für Teilchen in einem Feld

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \gamma m v^i + q A_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = -q \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\phi - \underline{v}\cdot\underline{A}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$ gilt #

Lagrange Dichte für Maxwellfelder

Behauptung

$$\left\| \mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j_\alpha A^\alpha \right.$$

ist die relativistische Fassung:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0 c^2}}_{\frac{1}{2\varepsilon_0}} |E|^2 - \frac{1}{2\mu_0}|B|^2 + \phi(\underline{x})\rho(\underline{x}) - \underline{j}(\underline{x})\cdot\underline{A}(\underline{x})$$

Lagrange-Feldgleichung

$$\left\| \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} \right\|$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}\left(\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda\right)\left(\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda\right) - j_\alpha A^\alpha$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \text{ und } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = j_\nu$$

$$\Rightarrow \partial^\mu \frac{1}{\mu_0} F_{\mu\nu}(x) = j_\nu$$

$$\boxed{\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = \mu_0 j_\nu}$$

Maxwellgl. in relativistischer Formulierung reproduziert.