2.4. kohärente Felder, kohärente Zustände

- **bisherige Problem:** Photonenzahlzustand $\phi_n \equiv |n\rangle$

führt auf $\langle E\rangle = 0$, offensichtlich keine

vernünftigen Zustände f. ED,

werden i.a. durch spontane Emission erzeugt

- such Zustand $\langle E\rangle \neq 0$

geht mit Überlagerung v. Photonzahlzuständen

$\langle\alpha(t)|E|\alpha(t)\rangle$, „$|\alpha(t)\rangle$" $\hat{=}$ kohärenter Zustand

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

gilt allgemein $\forall$ Zustände

für kohärente Zustand $|\alpha(t)\rangle$ die c_n's geschickt wählen

$$c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ (komplex)}$$

Bemerkung:

a) $|\alpha(t)\rangle$ heißt kohärenter Zustand

und im Grenzfall vieler Photonen ($|\alpha|^2 \gg 1$)

kann man mit einem klassischen Feld rechnen

$$E_n = n\hbar\omega + \cancel{\frac{\hbar\omega}{2}}$$

weglassen

$$|\alpha(t)\rangle \equiv |\alpha, t\rangle$$

$$= \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} |n\rangle$$

$$= \underbrace{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}_{\text{Normierung.}} \sum_n \frac{\left(\alpha e^{-i\omega t}\right)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\alpha(t) \equiv \alpha e^{-i\omega t}$$

b) $|\alpha(t)\rangle$ ist Eigenzustand v. b

$$\underline{b}|\alpha(t)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\underline{b}|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle} e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} \quad \text{QM I}$$

weil $n=-1$ verboten

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle e^{-i\frac{\varepsilon_n t}{\hbar}}$$

Indexverschiebg. $n \to n+1$

$$= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle e^{-i\varepsilon_{n+1} t/\hbar}$$

$$\boxed{b\,|\alpha(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t} |\alpha(t)\rangle}$$

$b|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad t=0$

insbesond. ist $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand v. b

c) $|\alpha(t)\rangle$ ist normiert

$$\langle\alpha(t)|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^*(t)^n}{\sqrt{n!}} \langle n| \; e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_m \frac{\alpha(t)^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle$$

$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$

$$= e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{|\alpha(t)|^{2n}}{n!}$$

$$= e^{-|\alpha|^2} e^{+|\alpha|^2} = 1$$

d) $|\alpha(t)\rangle$ ist kein Eigenzustand zu b^+

$$b^+ |\alpha(t)\rangle \neq \alpha^* |\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha(t)| b^+ = \alpha^* \langle\alpha(t)|$$

e) andere Darstellg:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{\alpha(t) b^+ - \alpha^*(t) b} |0\rangle$$

$$\equiv e^{\underset{\uparrow}{D(\alpha)}} |0\rangle$$

Verschiebeoperator

Beweis:

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n(t)}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \underbrace{\sum_n \frac{\alpha^n(t)}{n!} (b^+)^n}_{e^{\alpha(t) b^+}} |0\rangle$$

das verstehen wir darunter

$$\boxed{|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha(t) b^+} |0\rangle}$$

auch Darstellg.

es gilt: $$e^{\hat{c}} e^{\hat{d}} = e^{\hat{c}+\hat{d}} \, e^{\underbrace{\frac{1}{2}[\hat{c},\hat{d}]}_{\text{Zahl}}}$$

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}} e^{\alpha(t) b^+} \, 1 \, |0\rangle \qquad b|0\rangle = 0$$

$$\left(1 - \alpha^* b + \frac{\alpha^{*2}}{2} b^2 \dots\right)$$

Exponentialreihe

$$= e^{-\frac{|\alpha(t)|^2}{2}} e^{\alpha(t) b^+} e^{-\alpha^*(t) b} |0\rangle$$

$$\hat{c} = \alpha b^+ , \quad \hat{d} = -\alpha^* b$$

$$[\alpha b^+, -\alpha^* b] = -(\alpha\alpha^* b^+ b - \alpha\alpha^* b b^+)$$

$$= -|\alpha|^2 (\overbrace{b^+ b - b b^+}^{-1})$$

$$= \underline{\underline{|\alpha|^2}}$$

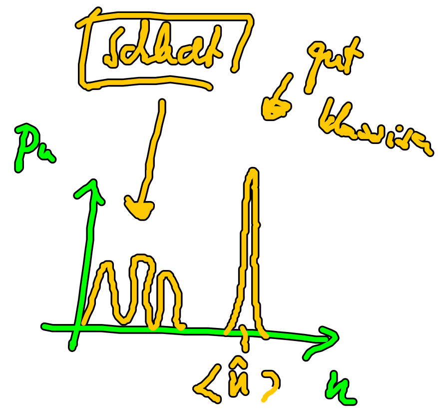
$$\boxed{|\alpha(t)\rangle = e^{\alpha(t) b^+ - \alpha^*(t) b} |0\rangle}$$

Berechnung der statistischen Größen

$$|\alpha(t)\rangle = \sum_n c_n \, e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} \, |n\rangle$$

Wahrscheinlichkeit n-Photonen zu finden

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$$



(i) Photonenzahl

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle b^+ b \rangle = \langle \alpha(t) | \underbrace{b^+}_{\alpha^*(t)} \underbrace{b}_{\alpha(t)} | \alpha(t) \rangle$$

$$= \alpha^*(t) \, \alpha(t) \, \underbrace{\langle \alpha(t) | \alpha(t) \rangle}_{1}$$

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha(t)|^2$$

Photonenzahl ist mit $|\alpha|^2$ bestimmt.

(ii) Photonenzahlschwankung

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \alpha(t) | \hat{n}^2 - \langle \hat{n} \rangle^2 | \alpha(t) \rangle$$

$$\hat{n}^2 = \underline{b^+ b b^+ b}$$
$$= b^+ (1 + b^+ b)\, b$$
$$= b^+ b + b^+ b^+ b b$$

$$= |\alpha|^2 + |\alpha|^4 - |\alpha|^4$$

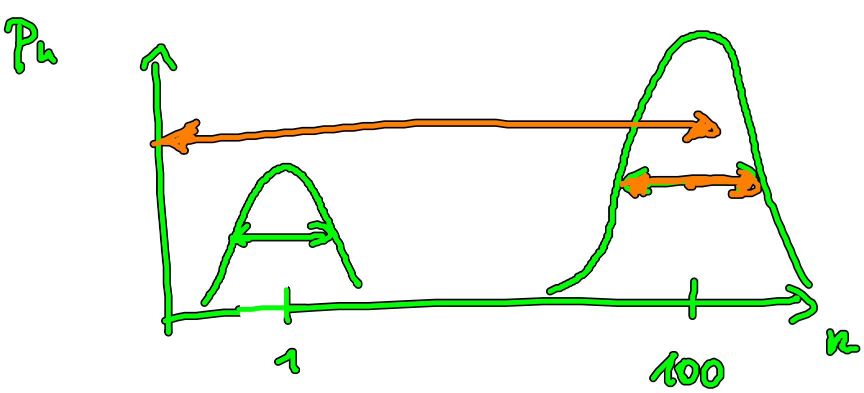
$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = |\alpha|^2$$

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle$$

eigentl. zur Beurteilg. d. Schwankg. bezgl. Mittelwert:

$$\sqrt{\frac{\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2}} = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle}} \longrightarrow 0$$

f. groß $\langle \hat{n} \rangle$



für große Photonzahl im Mod verschwindet
die mittlere relative Schwankung, d.h. $\langle \hat{n} \rangle \to \infty$
nicht die Angabe eines Meßwerts.

(iii) elektrisches Feld

$$\langle E \rangle = \langle \alpha(t) | E_0(x) (b^+ - b) | \alpha(t) \rangle$$

$$= E_0(x) \langle \alpha(t) | (\alpha^*(t) - \alpha(t)) | \alpha(t) \rangle$$

$$= E_0(x) \left(\alpha^*(t) - \alpha(t) \right)$$

$\theta = \text{konstant}$

$$= E_0(x) |\alpha| \left(e^{+i\omega t + i\theta} - e^{-i\omega t - i\theta} \right)$$

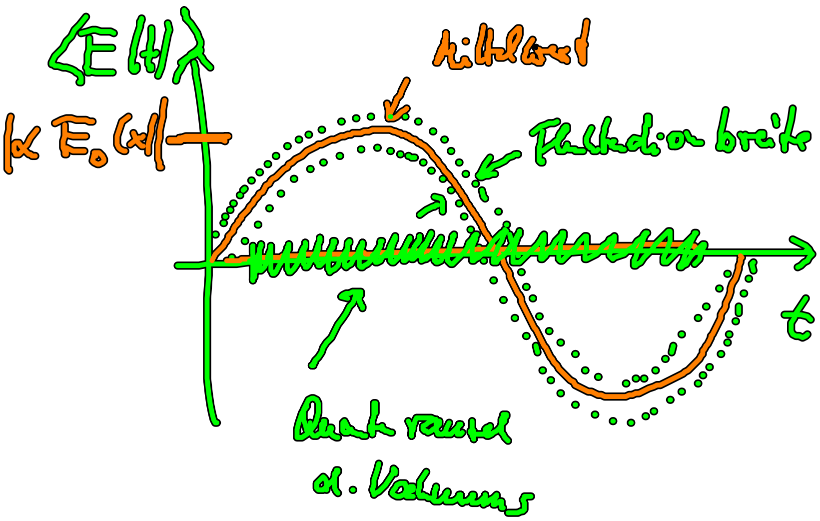
$$= 2 |E_0(x)| \, |\alpha| \sin(\omega t + \theta)$$

ist eine stehende Welle im Resonator
etwas woran Sie sich in klass. ED gewöhnt haben

(iv) Fluktuation d. E-Felds

$$\langle (\Delta E)^2 \rangle = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

ohne Rechnung $= \text{konstant} = |E_0(x)|^2$



Wenn das Quantenrauschen $\sim |E_0(x)|$ durch hohe $\alpha(t)$ überwunden wird, so gilt die klass. ED.

2.5. Beispiel f. Erzeugg. eines kohärenten Zustands

$\alpha \sim$ klassischer Strom erzeugt ein kohärenten Zustand

Quantenfeld b, b^+ soll von klass. Strom erzeugt werden.

$$H = H_0 + H_{WW}$$

$$H_0 = \underbrace{\hbar\omega b^+ b} \quad , \quad H_{WW} = \int d^3r \, \underbrace{\vec{j}(\vec{r},t)} \cdot \underbrace{\vec{A}(\vec{r},t)}$$

Feld im Resonator | klass. Strom | Vektorpotential

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial t} A = i E_0 \sin(kx) \left(b^+ e^{i\omega t} - b e^{-i\omega t} \right)$$

$$\Downarrow \quad A_z = -E_0 \sin(kx) \frac{1}{\omega} \left(b^+ e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t} \right)$$

$$H_{WW} = \gamma(t) \left(b^+ + b \right) \qquad \vec{j} \to j(\vec{r},t)\vec{e}_z$$

Schrödingerbild $\qquad -j_z(\vec{r},t) E_0 \frac{\sin(kx)}{\omega}$

Zu lösende Schrödingergleichg.:

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = \left(\hbar\omega b^+ b + \gamma(t) (b^+ + b) \right) |\psi(t)\rangle$$

Die Lösg. dieser Gleichg. ist der kohärente Zustand $|\alpha(t)\rangle$ wenn wir als AB das Photon vakuum setzen:

$$|\psi(t=0)\rangle = |0\rangle$$

Idee: Ansatz $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle$

bestimme Gl.-System f. $c_n(t)$

$\to$ Rekursionsformel $\dot{c}_n = f(c_{n-1})$

dann $c_n(t)$ bestimmen.

2) $$|\psi(t)\rangle = e^{\beta(t)} e^{\alpha(t) b^+} |0\rangle$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' \, \mu(t') \, e^{-i\omega(t-t')}$$

$$t \to \infty \quad = \underbrace{\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \mu(t') e^{i\omega t'}}_{\text{Zahl}} \; e^{-i\omega t}$$