English Summary:

1. Formalization of quantum mechanics

state vector in Hilbert space: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$

observables are operators $\hat{F}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

eigenvalues of momentum op. $\hat{\underline{p}}|\underline{p}\rangle = \underline{p}|\underline{p}\rangle$

position representation:

$$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r}|\psi\rangle = \int d^3p \, \langle \underline{r}|\underline{p}\rangle\langle \underline{p}|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \, \tilde{\psi}(\underline{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

momentum representation:

$$\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle \underline{p}|\psi\rangle = \int d^3r \, \langle \underline{p}|\underline{r}\rangle\langle \underline{r}|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \, \psi(\underline{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}$$

completeness relation:

$$\boxed{\begin{aligned} \int d^3p \, |\underline{p}\rangle\langle \underline{p}| &= \mathbb{1} \\ \int d^3r \, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}| &= \mathbb{1} \end{aligned}}$$

1.2 Operatoren im Hilbertraum

Eigenwertgl. in $\underline{r}$-Darstellung des Impulsop. $\hat{\underline{p}}$

$$\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\langle \underline{r}|\underline{p}\rangle = \underline{p}\langle \underline{r}|\underline{p}\rangle$$

Mult. mit $|\underline{r}\rangle$ u. Integr.

$$\underbrace{\int d^3r \, |\underline{r}\rangle\left(\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)\langle \underline{r}|}_{\hat{\underline{p}}}\underline{p}\rangle = \underline{p}\underbrace{\int d^3r \, |\underline{r}\rangle\langle \underline{r}|}_{\mathbb{1}}\underline{p}\rangle$$

$$\hat{\underline{p}}|\underline{p}\rangle = \underline{p}|\underline{p}\rangle$$

mit dem abstrakten Impuls-Op.

$$\boxed{\hat{\underline{p}} := \int d^3r \, |\underline{r}\rangle\left(\frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}\right)\langle \underline{r}|}$$

Sei: $F(\underline{r},\underline{p})$ eine klass. Obs.

$$F(\underline{r},\underline{p}) \longrightarrow \hat{F}(\underline{r}, \tfrac{\hbar}{i}\underline{\nabla})$$

$$\boxed{\hat{F} = \int d^3r\, |\underline{r}\rangle \hat{F}(\underline{r}, \tfrac{\hbar}{i}\underline{\nabla}) \langle \underline{r}|}$$

Umkehrung: $\hat{F}$ geg., $\quad |\phi\rangle = \hat{F}|\psi\rangle$

$$\Rightarrow \langle \underline{r}|\phi\rangle = \langle \underline{r}|\hat{F}\underset{\uparrow \mathbb{1}}{|}\psi\rangle = \underbrace{\int d^3r'}\langle \underline{r}|\hat{F}\underbrace{|\underline{r}'\rangle\langle \underline{r}'|}\psi\rangle$$

$$\boxed{\phi(\underline{r}) = \int d^3r' \langle \underline{r}|\hat{F}|\underline{r}'\rangle \psi(\underline{r}')}$$

i.a. werden Op. in einer Darstellung zu linearen Integralop. (nichtlokal!)

Für die Ortsdarstellung für 1 Teilchen im (lokalen) Pot.:

$$\langle \underline{r}|\hat{F}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\hat{F}(\underline{r}, \tfrac{\hbar}{i}\underline{\nabla}) \quad *$$

(lokaler Differentialop.)

Ortsop. $\quad \hat{\underline{r}}\,\psi(\underline{r}) = \underline{r}\,\psi(\underline{r}) \quad$ (multiplikativ)

$$\hat{\underline{r}}\langle \underline{r}|\psi\rangle \overset{!}{=} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Eigenwert}}}{\underline{r}}\langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\psi\rangle = \int d^3r' \langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\underline{r}'\rangle\langle \underline{r}'|\psi\rangle \overset{!}{=} \underline{r}\langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\underline{r}'\rangle = \underline{r}\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Impulsdarst.: $\quad |\phi\rangle := \hat{\underline{r}}\,|\psi\rangle$

$$\phi(\underline{p}) \equiv \langle \underline{p}|\phi\rangle = \langle \underline{p}\underset{\uparrow \mathbb{1}}{|}\hat{\underline{r}}|\psi\rangle$$

$$\phi(\underline{p}) = \int d^3r\, \underbrace{\langle \underline{p}|\underline{r}\rangle}_{(2\pi\hbar)^{-3/2} e^{-i\frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{\hbar}}} \underbrace{\langle \underline{r}|\hat{\underline{r}}|\psi\rangle}_{\underline{r}\langle \underline{r}|\psi\rangle} = \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int d^3r}\, \underbrace{\underline{r}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}}_{-\frac{\hbar}{i}\nabla_p\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\underline{p}\cdot\underline{r}}\right)} \langle \underline{r}|\psi\rangle$$

$$\phi(\underline{p}) = -\frac{\hbar}{i}\nabla_p\left[\langle \underline{p}|\psi\rangle\right]$$

$$= -\frac{\hbar}{i}\nabla_{\underline{p}}\,\tilde{\psi}(\underline{p})$$

$\tilde{\psi}(\underline{p}) = \langle \underline{p} | \psi \rangle$

$\psi(\underline{r}) = \langle \underline{r} | \psi \rangle$

Also $\boxed{\hat{\underline{r}} \longrightarrow -\frac{\hbar}{i}\nabla_{\underline{p}}}$ in der Impulsdarstell.

<u>Energiedarstellung</u>

Sei in der Ortsdarstellung $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

mit Eigenfkt.en $\hat{H}\varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\hat{H}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)\langle x|n\rangle = E_n \langle x|n\rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |x\rangle\, \hat{H}\left(x, \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)}_{=\hat{H}}\langle x|n\rangle = E_n |n\rangle$$

Orthonormieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \varphi_m^*(x)\varphi_n(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx}\, \langle m|\underbrace{x\rangle\langle x}|n\rangle = \langle m|n\rangle$$

$$\boxed{\langle m|n\rangle = \delta_{mn}}$$

Häufig (!) ist die Energiedarst. <u>vollständig</u>
(z.B. 1-dim. harmon. Osz.)

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle n|\psi\rangle}_{c_n}\langle x|n\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x|n\rangle\langle n|\psi\rangle$$

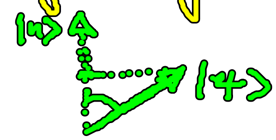
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1}$$

Hamilton-Op.:

$$\boxed{\hat H = \sum_{n=0}^{\infty} \hat H |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}}$$

Proj. Op. auf den n-ten Energie-Eigenzustand

$\sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle$



Allg.

Qm. Obs. $\rightarrow$ lineare Op. im Hilbertraum $\hat F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$\hat F(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = \lambda_1 \hat F|\psi_1\rangle + \lambda_2 \hat F|\psi_2\rangle$$

Def.: zu $\hat F$ adjungierte Op. $\hat F^+$ ist def. durch

$$\hat F|\psi\rangle = |\phi\rangle \iff \langle\psi|\hat F^+ = \langle\phi|$$

$$(\psi_1, \hat F\psi_2) = (\hat F^+\psi_1, \psi_2)$$

Def.: Ein lin. Op. $\hat F$ heißt selbstadjungiert (hermitesch), falls $\hat F = \hat F^+$

$$(\psi_1, \hat F\psi_2) = (\hat F\psi_1, \psi_2)$$

Die lin. Op. bilden eine Algebra, wobei die Multiplikation def. ist durch

$$(\hat F\cdot\hat G)|\psi\rangle := \hat F(\hat G|\psi\rangle)$$

Einheitsop. $\mathbb{1}$: $\mathbb{1}\cdot\hat F = \hat F\cdot\mathbb{1} = \hat F$

Nullop. $\mathcal{O}$: $\mathcal{O}\cdot\hat F = \hat F\cdot\mathcal{O} = \mathcal{O}$

Kommutator $[\hat F,\hat G] := \hat F\cdot\hat G - \hat G\cdot\hat F$

Es gilt: (i) $(\hat F\cdot\hat G)^+ = \hat G^+\cdot\hat F^+$

(ii) $\hat F^{++} = \hat F$

Matrixelement $\langle\psi_1|\hat F|\psi_2\rangle$

hermite'sche Op. $\langle\psi_1|\underbrace{\hat F|\psi_2\rangle} = \langle\psi_2|\hat F|\psi_1\rangle^*$

$$F_{ij} = F_{ji}^*$$

Erwartungswerte

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$$

Erwartungswerte hermite'scher Op. sind reell:

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle^*$$

$\Rightarrow$ Phys. Obs. durch hermite'sche Op. darstellen!

1.3. Eigenwerte u. Eigenzustände von hermite'schen Op.

Annahme: Eine phys. Obs. F habe im Zustand $|\psi\rangle$ einen scharfen Wert

qm. Unschärfe $\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle = \langle (\hat{F} - \langle \hat{F} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{F}^2 \rangle - \langle \hat{F} \rangle^2 \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \hat{F}|\psi\rangle = \alpha|\psi\rangle$ d.h. $|\psi\rangle$ Eigenzustand

Theorem 1: Eigenwerte hermite'scher Op. sind reell.

Theorem 2: Eigenzustände hermite'scher Op. zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

bei Entartung: Eigenraum mit Dim $d > 1$ zu einem Eigenwert

$\rightarrow$ Eigenzustände können orthonormiert gewählt werden (Schmidt'sche Orthogonalisierung)

$$\boxed{\langle n, \beta' | m, \beta \rangle = \delta_{mn} \delta_{\beta'\beta}}$$

Theorem 3: Zwei hermite'sche Op. $\hat{F}, \hat{G}$ kommutieren genau dann, wenn sie ein gemeinsames System von Eigenzuständen besitzen.

Def.: Ein lin. Op. $U: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt unitär, falls

$$U^+ U = U U^+ = 1$$

$\Leftrightarrow \quad U^+ = U^{-1}$

Skalarprodukt ist bei unitäre Trafo invariant

$\Rightarrow$ Unitäre Op. transformieren von einer Basis (vollst. ONS) in eine andere

Trafo in die Eigenbasis eines Op. $\hat{F}$

$$\langle \phi' | \hat{F}' | \psi' \rangle = \langle \phi | \underbrace{U^+ \hat{F}' U}_{\hat{F}} | \psi \rangle = F_\psi \delta_{\phi\psi}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |\psi\rangle &= U^+ |\psi'\rangle \\ \hat{F} &= U^+ \hat{F}' U \end{aligned}}$$