

English Summary:

1.6 Harmonic oscillator (algebraic solution)

$$\text{ladder operator: } b = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} [b, b^\dagger] = 1$$
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)$$

$$b|0\rangle = 0 \quad \text{ground state } n=0$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle \quad n\text{-th excited state}$$

$N := b^\dagger b$ number operator of oscillation quanta

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \begin{array}{l} b^\dagger \text{ creation operator} \\ b \text{ annihilation operator} \end{array}$$

1.7 Drehimpuls und Spin

1.7.1 Drehimpuls - Eigenzustände

Drehimpulsoperator \underline{L} (hermitesch)

$$[L_j, L_k] = i\hbar L_l \quad \text{mit } (jkl) \text{ zyklisch}$$

(folgt für den Bahndrehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$
in Komponenten $L_j = x_k p_l - x_l p_k$ mit (jkl) zykl.)

Drehimpuls - Vertauschungsrelationen:

$$\underline{L} \times \underline{L} = i\hbar \underline{L} \quad \Rightarrow \text{ex. keine gemeinsamen Eigenvektoren zu je 2 Komponenten des Drehimp.}$$

$$[L^2, L_k] = 0 \quad \text{für } k=1,2,3$$

algebraische Lösung der Eigenwertgl. für L^2, L_3
mit Leiteroperatoren $L_+ = L_1 + iL_2, L_- = L_1 - iL_2$ ergibt

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad \text{Drehimpulsquantenzahl: } l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$$

$$L_3 |l, m\rangle = \hbar m |l, m\rangle \quad \begin{array}{l} m = -l, -l+1, \dots, l-2, l-1, l \\ \text{Richtungsquantenzahl} \end{array}$$

$(2l+1)$ -fache Richtungsentartung von L^2 .

l	$\hbar\sqrt{l(l+1)}$	m	
0	0	0	Bahndrehimpuls $\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$
$\frac{1}{2}$	$\hbar\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	Spin
1	$\hbar\sqrt{2}$	$-1, 0, 1$	Bahndrehimpuls

1.7.2 Spin-Operatoren und -Zustände

$$[\hat{S}_j, \hat{S}_k] = i\hbar \hat{S}_l \quad \boxed{s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}}$$

Spin-Eigenzustände $|m_s\rangle \in \mathcal{H}_s$ Spin-Hilbertraum (2-dim.)

Notation: $|+\frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle$ "Spin up"

$|-\frac{1}{2}\rangle = |\downarrow\rangle$ "Spin down"

Dimensionsloser Spin-Operator $\hat{\sigma}$:

$$\hat{S}_3 |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\sigma}_3 |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle \\ \hat{\sigma}_3 |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle \end{aligned}}$$

$$\hat{S}_3 |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$$

\Rightarrow

Eigenwerte ± 1

Orthonormierung: $\langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 1$

$$\langle \uparrow | \downarrow \rangle = 0$$

Vollständigkeit: $|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = 1$

Bel., auch zeitabh. Spinzustand kann entwickelt werden:

$$|a(t)\rangle = |\uparrow\rangle \underbrace{\langle \uparrow | a(t) \rangle}_{=: a_1(t)} + |\downarrow\rangle \underbrace{\langle \downarrow | a(t) \rangle}_{=: a_2(t)}$$

$$\text{Aus } \underline{\hat{S}} \times \underline{\hat{S}} = i\hbar \underline{\hat{S}} \text{ folgt}$$

$$\hat{S}_i \times \hat{S}_j = 2i\hat{S}_k \quad \text{bzw. } [\hat{S}_j, \hat{S}_k] = 2i\hat{S}_l \quad \text{zykl.}$$

$$\hat{S}^2 |\uparrow\rangle = 3 |\uparrow\rangle$$

$$\hat{S}^2 |\downarrow\rangle = 3 |\downarrow\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{S}_1 |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ \hat{S}_2 |\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle \end{cases} \quad \text{Spin-flip-Op.}$$

$$\begin{cases} \hat{S}_1 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \\ \hat{S}_2 |\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle \end{cases}$$

Darstellung der Spin-Op. durch 2x2-Matrizen im 2-dim. Spin-Eigenraum \mathcal{H}_S :

$$\begin{pmatrix} \langle \uparrow | \hat{S}_i | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \hat{S}_i | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \hat{S}_i | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \hat{S}_i | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = (\sigma_i)_{\alpha\beta}$$

Op. komp. $i=1,2,3$ Matrixelemente $\alpha, \beta = 1,2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli'sche Spinmatrizen

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$$

$$\Rightarrow [\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \quad \checkmark$$

S_3 -Darstellung der Zustände

$$\begin{array}{l} |\uparrow\rangle \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle \alpha | \uparrow \rangle = \delta_{\alpha 1} \\ |\downarrow\rangle \cong \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \langle \alpha | \downarrow \rangle = \delta_{\alpha 2} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Basis-} \\ \text{Spinoren} \\ \text{Spaltenvektor} \end{array} \right\}$$

z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{S}_1 |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \uparrow | \cong (1, 0) \\ \langle \downarrow | \cong (0, 1) \end{array} \right\} \text{Zeilenvektor}$$

Sei nun $|n, l, m, m_s\rangle$ ein Zustand mit Bahn- u. Spin-Freiheitsgrad

$$|n l m m_s\rangle = |n l m\rangle |m_s\rangle \in \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_S$$

$\in \mathcal{H}_B$ $\in \mathcal{H}_S$ direktes Produkt der Hilberträume
 Bahn- Spin-
 Zustand

(allg. für Produktzustände $|\varphi^1 \varphi^2\rangle = |\varphi^1\rangle |\varphi^2\rangle$:)

$$\langle \varphi^1 \varphi^2 | \chi^1 \chi^2 \rangle = \langle \varphi^1 | \chi^1 \rangle \langle \varphi^2 | \chi^2 \rangle$$

$$|4\rangle_t = |4_1\rangle_t |\uparrow\rangle + |4_2\rangle_t |\downarrow\rangle$$

mit $|4_\alpha\rangle_t = \int d^3r |r\rangle \langle r | 4_\alpha \rangle_t$ Bahn-Zustand $\alpha = 1, 2$

Ortsraum-Basis

In der Matrixdarstellung des Spinnormales:

$$|4\rangle_t = \begin{pmatrix} |4_1\rangle_t \\ |4_2\rangle_t \end{pmatrix} = \int d^3r |r\rangle \begin{pmatrix} \langle r | 4_1 \rangle_t \\ \langle r | 4_2 \rangle_t \end{pmatrix}$$

↑ 2 Spinkomponenten

Vollständigkeit der Zustände

$$\int d^3r \{ |r\uparrow\rangle \langle r\uparrow| + |r\downarrow\rangle \langle r\downarrow| \} = \mathbb{1} \in \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_S$$

Tensorenprodukt

$$\left. \begin{aligned} |\langle r\uparrow | 4 \rangle_t|^2 &= |\langle r | 4_1 \rangle_t|^2 \\ |\langle r\downarrow | 4 \rangle_t|^2 &= |\langle r | 4_2 \rangle_t|^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Wahrscheinl. d. Abh.} \\ \text{das El. zu Zeit } t \\ \text{bei } r \text{ mit Spin } \uparrow \text{ bzw. } \downarrow \\ \text{zu finden} \end{array}$$

Schrödingergl. im Spin-Bahn-Raum:

Ham.op. für Bahn: $\hat{H}_B = \frac{1}{2m_0} (\underline{p} - e\underline{A})^2 + V$ (El. mit Lad. $e < 0$)

Ham.op. für Spin: $\hat{H}_S = \hbar \omega_L \hat{\sigma}_3$ ($\omega_L = \frac{|e|B}{2m_0}$ Larmorfrequenz)

wirkt im Hilbertraum \mathcal{H}_S

Ohne \hat{H}_S : $\hat{H}_B |4_\alpha\rangle_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4_\alpha\rangle_t$ $\alpha = 1, 2$

(2 Schrödingergl. im Hilbertraum \mathcal{H}_B)

$$\Leftrightarrow (\hat{H}_B \times 1_s) |4\rangle_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4\rangle_t$$

"Einop. im Spinraum $1_s \hat{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ "

Mit \hat{H}_s : $(\hat{H}_B \otimes 1_s + \hat{H}_s) |4\rangle_t = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |4\rangle_t$

in Matrix-Darstell.:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_B + \hbar\omega_L & 0 \\ 0 & \hat{H}_B - \hbar\omega_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |4_1\rangle_t \\ |4_2\rangle_t \end{pmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} |4_1\rangle_t \\ |4_2\rangle_t \end{pmatrix}$$

Pauli-Gleichung

Anwendung: einfaches Zeeman-Effekt mit Spin
1 El. im Kugelsymm. Pot. u. homog. Magnetfeld ($\underline{B} = B \underline{e}_3$)

$$\hat{H} = \underbrace{\left[\frac{1}{2m_0} (\hat{p} - e\underline{A})^2 + V(r) \right]}_{\hat{H}_B} \otimes \underbrace{1_s}_{\text{Spinraum}} - \frac{\hbar e B}{2m_0} \hat{\sigma}_3$$

$$\approx \underbrace{\left[\frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(r) \right]}_{\hat{H}_0} \otimes 1_s - \frac{eB}{2m_0} (\hat{L}_3 \otimes 1_s + \hbar \hat{\sigma}_3)$$

\hat{H}_0 mit $\hat{H}_0 |nlm\rangle = E_{nl} |nlm\rangle$

$\underline{B} = 0$: Eigenzustand mit Spin

$$(\hat{H}_0 \otimes 1_s) |nlm m_s\rangle = E_{nl} |nlm m_s\rangle$$

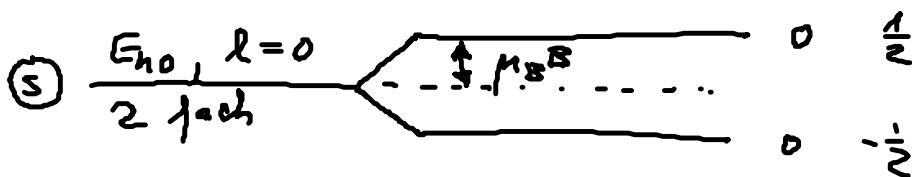
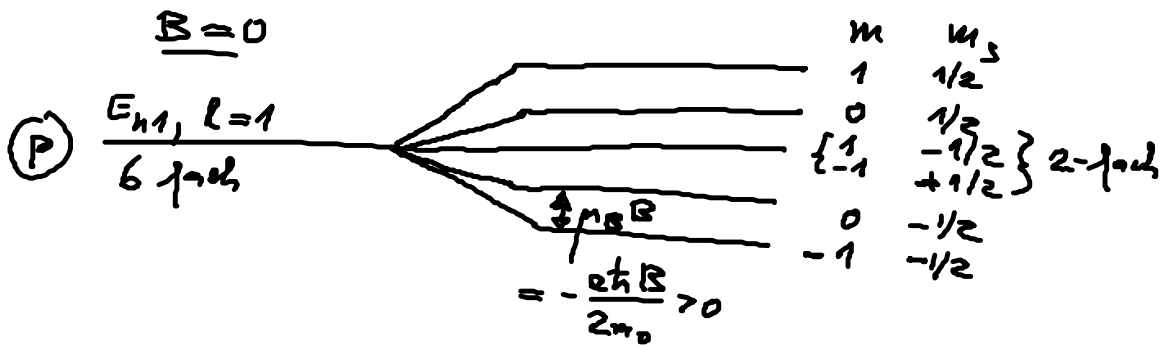
2(2l+1) fache Entartung
(Beim H-Atom zusätzl. l-Entartung)

$B \neq 0$:

$$\hat{H} |nlm m_s\rangle = \hat{H}_0 |nlm\rangle |m_s\rangle - \frac{eB}{2m_0} \left\{ \underbrace{(\hat{L}_3 |nlm\rangle)}_{\hbar m |nlm\rangle} |m_s\rangle + \hbar \underbrace{(\hat{\sigma}_3 |m_s\rangle)}_{2m_s |m_s\rangle} |nlm\rangle \right\}$$

$$= \left[E_{nl} - \frac{\hbar e B}{2m_0} (m + 2m_s) \right] |n, l, m, m_s\rangle$$

teilweise Aufhebung der
 $2(2l+1)$ fachen Energie-Entartung



$$E = E_{nl} + \mu_B B (m + 2m_s)$$

↑
 wegen Landé-Faktor $g=2$