

English Summary:

Defect electrons $d_k^+ = a_{vk}^+$ (holes) $d_k = a_{vk}^+$ valence band electrons $a_{kv}^+ a_{kv} = 1 - d_k^+ d_k$

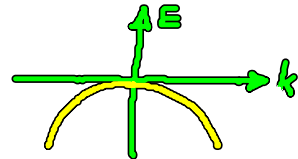
$$H_D = - \sum_k d_k^+ d_k \epsilon_{kv}, \quad \epsilon_{kv} = \epsilon_{0v} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}$$

electron-hole interaction: exciton

$$H_{e-h} = \sum_{k_1} (- a_{k_1}^+ a_{k_2} d_{k_3}^+ d_{k_4} \langle k_{1L} k_{2v} | V | k_{3v} k_{4L} \rangle$$

$$+ a_{k_2}^+ a_{k_4} d_{k_3}^+ d_{k_1} \langle k_{1v} k_{2L} | V | k_{3v} k_{4L} \rangle$$

exchange interaction $k_1 \leftrightarrow k_2$

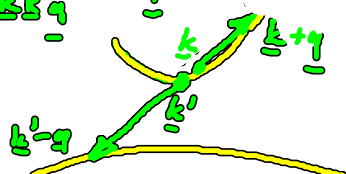


impact ionization:

$$H_{ii}^e = \sum_{k, k'} M_{k, k'}^e a_{k'}^+ a_{k'} a_{k'}^+ d_{k'}^+ a_{k'}^+ + \sum_{k, k'} M_{k, k'}^e a_{k'}^+ a_{k'} d_{k'}^+ a_{k'}^+ a_{k'}^+$$



$e \rightarrow 2e + h$



$2e + h \rightarrow e$

phonons:

$$H_{ph} = \sum_q \hbar \omega_q b_q^+ b_q + \frac{1}{2} \sum_q \hbar \omega_q$$

bosons: $[b_q, b_q^+] = 1$

e.-phonon interaction:

$$H_{e-ph} = \sum_{k, q} M_{k, q} (b_{-q}^+ + b_q) a_{k+q}^+ a_k$$

em. abs.



4. Quantenstatistik

4.1 Dichtematrix - statistischer Operator

4.1.1 Erwartungswerte

(i) (bisher) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat $| \alpha \rangle$ im reinen Zust. $| \psi \rangle$

$$| \psi \rangle \in \mathcal{H}_1$$

$$| \langle \alpha | \psi \rangle |^2 = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle = |c_\alpha|^2$$

Projektor inhärenter statist. Charakter!

Erwartungswert von \hat{M} im Zustand $| \psi \rangle$:

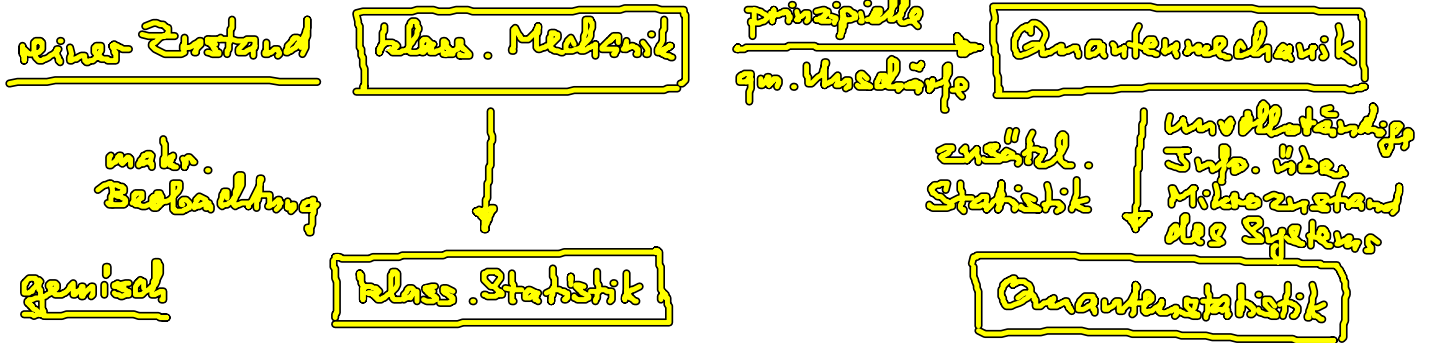
$$\langle \hat{M} \rangle = \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \sum_\alpha \langle \psi | \hat{M} | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \quad \text{☺}$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \gamma | \alpha \rangle \langle \alpha | \gamma \rangle \underbrace{\langle \alpha | \hat{M} | \alpha \rangle}_{M_{\alpha\alpha}}$$

falls $|\alpha\rangle$ Eigenbasis
 $= \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| \hat{M} |\alpha\rangle$
 Eigenwerte von \hat{M}

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \gamma \rangle \underbrace{\langle \gamma | \hat{M} | \alpha \rangle}_{\mathbb{P}_{\gamma}} \\ = \text{tr}(\mathbb{P}_{\gamma} \hat{M})$$

trace = Spur



(ii) Quantenmech. Gemisch

- unvollständige Info über Mikrozustand
 also Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i über die
 möglichen reinen Zustände $|\gamma_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Teil}}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_i p_i \langle \gamma_i | \hat{M} | \gamma_i \rangle \quad \text{wobei } \sum_i p_i = 1$$

$$= \sum_{ij} p_i \langle \gamma_j | \hat{M} | \gamma_i \rangle \langle \gamma_j | \gamma_i \rangle$$

$$= \sum_{ij} \langle \gamma_j | \gamma_i \rangle p_i \langle \gamma_i | \hat{M} | \gamma_i \rangle$$

$$= \sum_j \langle \gamma_j | \hat{\rho} \hat{M} | \gamma_j \rangle$$

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\gamma_i\rangle \langle \gamma_i|$$

statistischer Op.

= Dichtematrix

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{M}$$

Es gilt: $\text{tr} \hat{\rho} = 1$

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho} \\ \text{tr} \hat{\rho}^2 < 1$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

hermitesch

} Gleichheit gilt nur für reine Zustände
 $(\hat{\rho} = \hat{\rho}^2, \hat{\rho}^2 = \hat{\rho})$

Mittelwert eines Projektionsoperators $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

$$\text{tr}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle\varphi_n|\psi_i\rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

≙ Wahrscheinlichkeit, den Zustand $|\varphi_n\rangle$
bei Messung zu erhalten

Bem.: reine Zustände → kohärente Überlagerung von
Wahrscheinlichk. amplituden

$$\langle\hat{M}\rangle = \sum_{\alpha\alpha'} \langle\psi|\alpha\rangle \langle\alpha|\hat{M}|\alpha'\rangle \langle\alpha'|\psi\rangle$$

← qu. Phasen →

⇒ Interferensterme, falls \hat{M} nicht diagonal
in $|\alpha\rangle$

Gemisch → inkohärente Überlagerung von reinen Zust.
⇒ keine Interferenz!

4.1.2 Liouville-von-Neumann-Gleichung

zeitentwicklung der Dichtematrix im Schrödingerbild
(Zust.zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i\rangle = \hat{H} |\psi_i\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi_i| = \langle\psi_i| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_i p_i (|\dot{\psi}_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\dot{\psi}_i|)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{H})$$

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Vorsicht: nicht verwechseln mit
Bewegungsgl. für Op.
im Heisenbergbild
(dort anderes Vorzeichen!)

Liouville-von-Neumann-Gl.

- Quantenmechan. Analogon zur Liouville-Gl. der klass. Mech.

Bemerkung: • Für 1 Teilchen in 2-Niveau-System (Basis: 2 Zust.)
 ist $\hat{\rho}$ eine 2×2 -Matrix, d.h. v. Normierung- $\hat{\rho}$.
 liefert 4 Gln.

- Für Vielteilchensystem (Halbleiter mit 2 Bändern)
 wird Basis im Fockraum benötigt

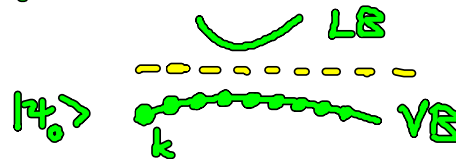
4.1.3. Verteilungsfkt. der Elektronen/Löcher im Halbleiter

Betrachte $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ Mittelwert des Besetzungszahlop.

in gemischtem Zustand $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$

$|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$: mögliche Verteilung der Elektronen
 (Vielteilch.zust.) auf erlaubte 1-Teilchen-Zustände k
 (Leere Zustände)

Beisp. HL: Grundzustand bei $T=0$



$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} a_k^\dagger a_k)$$

$$= \sum_i p_i \langle \psi_i | a_k^\dagger a_k | \psi_i \rangle$$

$$= \sum_i p_i n_k^i$$

n_k^i : Besetzung des 1-T.-Zust. k
 im Vielteilchen-Zust. $|\psi_i\rangle$
 $n_k^i = 0, 1$

$$= f_e(k) \quad \underline{\text{Verteilungsfkt.}}$$

(Max. von $f_e(k)$: $n_k^i = 1 \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$)

$f_e(k)$ ist die Wahrscheinlichkeit, ein El. bei k zu finden

- im reinen Zustand $f_e(k) = 0$ oder $f_e(k) = 1$
- in Gemisch $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- im thermodyn. Gleichgewicht ist $f_e(k)$ die Fermi-Verteilung
 (s. § 4.4)

Analog $\langle d_k^\dagger d_k \rangle = f_h(k) \quad \underline{\text{Loch-Verteilungsfkt.}}$

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl

betrachtet wird: $f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^\dagger a_{ks} \rangle$

4.2 Semiklass. WW mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichung der Elektronenverteilung vom thermodyn. Gleichgew.

⇒ Ham. op. \hat{H}_{opt}

Dipolkopplung an elektr. Feld $\underline{E}(r, t)$, z.B. Laserpuls (extern, klass. beschrieben)

$$\hat{H}_{opt} = e \underline{r} \cdot \underline{E}(r, t) \quad \text{mit qu. d. Dipol-Op.}$$

(halbklassisch: keine Feldquantisierung des Lichtes)

4.2.1 Polarisation des Halbleiters

qu. Dipoldichte (vgl. klass. el. Dipolmomentdichte)

$$\hat{\underline{P}}(r, t) = e \hat{\psi}^\dagger(r, t) \underline{r} \hat{\psi}(r, t) \quad \hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi} \text{ sind Feldop.}$$

Def. Polarisation \underline{P} als Erwartungswert des Dipoldichteop. $\hat{\underline{P}}$

$$\underline{P}(r, t) = \langle \hat{\underline{P}} \rangle = \langle e \hat{\psi}^\dagger(r, t) \underline{r} \hat{\psi}(r, t) \rangle$$

reelle Größe