## English Summary:

### 4. Quantum Statistics

4.1 Density matrix – statistical operator $\hat{\varrho}$ : $\langle \hat{M} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\varrho}\hat{M})$
(mixed state)

Von Neumann eq. $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varrho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\varrho}]$

distrib. fct. of electrons $f_e(\underline{k}) = \langle a_k^+ a_k \rangle$
of holes $f_h(\underline{k}) = \langle d_k^+ d_k \rangle$

makroskop. Polarisation $\underline{P}(\underline{r},t) = \langle \hat{\underline{P}} \rangle = \langle e\hat{\psi}^+(\underline{r},t)\,\underline{r}\,\hat{\psi}(\underline{r},t)\rangle$

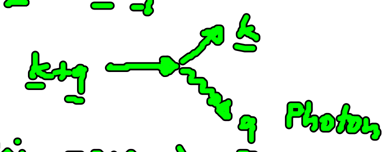
- Blochdarstellung $\hat{\psi}(\underline{r},t) = \sum_{n\underline{k}} a_{n\underline{k}}\,\psi_{n\underline{k}}(\underline{r})$ ← Blochfkt. $e^{i\underline{k}\underline{r}}\,u_{n\underline{k}}(\underline{r})$

$$\hat{\underline{P}}(\underline{r},t) = \sum_{\substack{n\underline{k}\\ n'\underline{k}'}} a^+_{n\underline{k}}\,a_{n'\underline{k}'}\,\psi^*_{n\underline{k}}(\underline{r})\,e\underline{r}\,\psi_{n'\underline{k}'}(\underline{r})$$

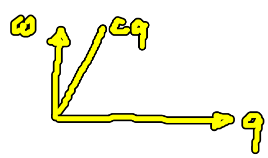
- Fouriertrafo $\hat{\underline{P}}(\underline{q},t) = \int d^3r\,\hat{\underline{P}}(\underline{r},t)\,e^{-i\underline{q}\underline{r}}$
- Def.: el. Dipolmatrixelement $\mu_{nn'}(\underline{k}) = \frac{1}{V_{EZ}}\int d^3r\,u_{n\underline{k}}(\underline{r})\,e\underline{r}\,u_{n'\underline{k}}(\underline{r})$
(oft auch mit $d_{nn'}$ bezeichnet, $e<0$)
- Näherung: schwache $\underline{k}$-Abhängigkeit der Blochfkt. $u_{n\underline{k}}$

längere Rechnung $\Rightarrow \underline{P}(\underline{q},t) = -\sum_{nn'\underline{k}} \mu_{nn'}(\underline{k})\langle a^+_{n\underline{k}}\,a_{n'\underline{k}+\underline{q}}\rangle$

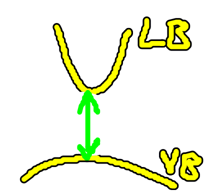
Näherung für opt. Grenzfall:




(1) $q \approx 0$ (Impuls der Photonen klein gegen Quasiimpuls der Elektronen)




(2) Bandkantenoptik $\hbar\omega \approx E_G$ (Bandlücke)
$\Rightarrow$ nur Interbandübergänge (LB ↔ VB)



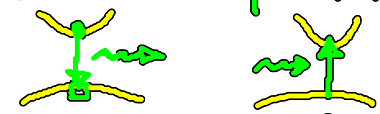

(3) 2-Band-Modell: $n = L, V$ und $\mu_{LV}(\underline{k}) \approx \mu_{LV}(0)$
konstantes Dipolmatrixel.

Elektron-Loch-Bild:

Interbandpolarisation (makr.)

$$\underline{P}^{inter}(\underline{q},t) \approx \underline{P}(0,t) \equiv \boxed{\underline{P}(t) = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu} \left( \langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \rangle + \langle a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}} \rangle \right)}$$

$p(\underline{k},t)$ $\qquad$ $p^*(\underline{k},t)$



em. $\qquad$ ab.

mikroskop. Interbandpolarisation eines Zustandes $\underline{k}$ :

$$\boxed{\begin{aligned} p(\underline{k},t) &= \langle d_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \rangle \\ p^*(\underline{k},t) &= \langle a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}} \rangle \end{aligned}}$$

## 4.2.2 Elektron-Feld-WW-Op.

$$\hat{H}_{opt} = - \int d^3r \, \psi^+(\underline{r},t) \, e \underline{r} \, \underline{E}(\underline{r},t) \, \psi(\underline{r},t)$$

Fouriertrafo $\quad \underline{E}(\underline{r},t) = \frac{1}{V} \sum_{\underline{q}} e^{i\underline{q}\underline{r}} \, \underline{E}(\underline{q},t)$

$$\Rightarrow \hat{H}_{opt} = \frac{1}{V} \sum_{\substack{\underline{k}\underline{q} \\ nn'}} \underline{E}(\underline{q},t) \, a^+_{n\underline{k}} \, a_{n',\underline{k}+\underline{q}} \, \underline{\mu}_{nn'}(\underline{k})$$

Bandkantenoptik wie in 4.2.1 :

$$\boxed{\hat{H}_{opt} = \sum_{\underline{k}} \underline{\mu} \cdot \underline{E}(t) \left( a^+_{\underline{k}} d^+_{\underline{k}} + d_k a_k \right)}$$

## 4.3 Halbleiter-Blochgleichungen

- Zeitentwicklung folgender Größen :

  Verteilungsfkt. $\quad f_e(\underline{k},t) = \langle a^+_k a_k \rangle$

  $\qquad f_h(\underline{k},t) = \langle d^+_k d_k \rangle$

  mikr. Polarisation $\quad p(\underline{k},t) = \langle d_k a_k \rangle$

  $\qquad p^*(\underline{k},t) = \langle a^+_k d^+_k \rangle$

- Ansatz : Bewegungsgl. für Erwartungswerte (Fundamentalrelation der Quantentheorie)

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{F} \rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \right\rangle \qquad \text{(bildunabh.)}$$

Berechne Kommutatoren ① $[\hat{H}, a_k^+ a_k]$

② $[\hat{H}, a_k^+ d_k^+]$

Ham.op. $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{e-e} + \hat{H}_{ii} + \hat{H}_{e-ph} + \hat{H}_{opt}$

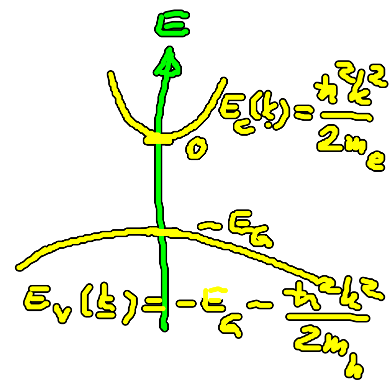
§ 3.6.1 §3.6.2 §3.7.2 §4.2.2

1. Fall: Vernachlässigung der WW $\hat{H}_{e-e}, \hat{H}_{ii}, \hat{H}_{e-ph}$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{opt}$$

Elektron-Loch-Bild:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\underline{k}} E_c(\underline{k}) a_k^+ a_k - \sum_{\underline{k}} E_v(\underline{k}) d_k^+ d_k$$




Beiträge zum Kommutator ①:

$$[\hat{H}_0, a_l^+ a_l] = \sum_k \left[ E_c(\underline{k}) (a_k^+ a_k a_l^+ a_l - a_l^+ a_l a_k^+ a_k) \right] - \sum_k E_v(\underline{k}) (\dots)$$

$$= \sum_k \Big[ E_c(k) ( -a_k^+ \cancel{a_l^+ a_k} a_l + a_l^+ \cancel{a_k^+ a_l} a_k$$

$$+ \delta_{kl} \cancel{a_k^+ a_l} - \delta_{lk} \cancel{a_l^+ a_k} \Big] - \sum_k E_v(k) (\dots)$$

$$= 0$$

d.h. $\hat{H}_0$ liefert keine Zeitabh. von $f_e$ und $f_h$

4× vorhanden

$$[\hat{H}_{opt}, a_l^+ a_l] = \sum_k \left\{ \mu \cdot \underline{E} \left[ (a_k^+ d_k^+ \cancel{a_l^+} a_l - a_l^+ \cancel{a_l a_k^+} d_k^+) + (d_k \cancel{a_k a_l^+} a_l - \cancel{a_l^+ a_l d_k} a_k) \right] \right\}$$

$$= \sum_k \left\{ \mu \cdot \underline{E} \left[ (-\delta_{lk} a_l^+ d_k^+) + \delta_{lk} d_k a_l \right] \right\}$$

$$= -\mu \cdot \underline{E} \left( \underbrace{a_l^+ d_l^+} - \underbrace{d_l a_l} \right)$$

Generation von e-h Paar    Rekombination von e-h Paar

$$\Rightarrow \langle [\hat{H}_{opt}, a_l^+ a_l] \rangle = -\mu \cdot \underline{E} \left( p_l^*(t) - p_l(t) \right) = \frac{\hbar}{i} \dot{f}_e$$

WW mit $\hat{H}_{opt}$ führt zur Ankopplung an die Polarisation

② Dynamik der Polarisation

$$\frac{\partial}{\partial t} p_k(t) = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, d_k a_k] \rangle$$

Beiträge zum Kommutator:

$$[\hat{H}_{opt}, d_l a_l] = \sum_k \mu \cdot \underline{E} \left[ \left( a_k^+ d_k^+ d_l a_l - d_l a_l a_k^+ d_k^+ \right) + \underbrace{\left( d_k a_k d_l a_l - d_l a_l d_k a_k \right)}_{} \right]$$

$$= \sum_k \mu \cdot \underline{E} \left[ \left( a_k^+ a_l d_k^+ d_l - a_l a_k^+ d_l d_k^+ \right) + 0 \right]$$

$$= \sum_k \mu \cdot \underline{E} \left( a_k^+ a_l d_k^+ d_l + a_k^+ a_l d_l d_k^+ - \delta_{lk} d_l d_k^+ \right)$$

$$= \sum_k \mu \cdot \underline{E} \left( a_k^+ a_l \cancel{d_k^+} d_l - a_k^+ a_l \cancel{d_k^+} d_l + \delta_{lk} a_k^+ a_k - \delta_{lk} d_l d_k^+ \right)$$

$$= \sum_k \mu \cdot \underline{E} \left( +\delta_{lk} a_k^+ a_k + \delta_{lk} d_k^+ d_l - \delta_{lk} \delta_{lk} \right)$$

$$= \mu \cdot \underline{E} \left( a_l^+ a_l + d_l^+ d_l - 1 \right)$$

$$\frac{\hbar}{i} \dot{p}(k,t) = \boxed{\langle [\hat{H}_{opt}, d_k a_k] \rangle = \mu \cdot \underline{E} \underbrace{\left( f_e(k) + f_h(k) - 1 \right)}_{}}$$

$$= -(1 - f_e)(1 - f_h) + f_e f_h$$

↑ Absorption    ↓ Emission

$\underbrace{\qquad\qquad}$

**Inversion** $f_e - (1 - f_h)$

Polarisation getrieben durch klass. Lichtquelle

$$[\hat{H}_0, d_l a_l] = \sum_k \left\{ E_c(k) \left( a_k^+ a_k d_l a_l - d_l a_l a_k^+ a_k \right) - E_v(k) \left( \dots \right) \right\}$$

$$= \sum_{k} \left( -E_c(k)\delta_{\ell k} d_\ell a_k - (-1) E_v(k) \delta_{\ell k} d_k a_\ell \right)$$

$$= -\underbrace{\left( E_c(\ell) - E_v(\ell) \right)}_{\hbar\omega_p(\ell)} d_\ell a_\ell$$

freie Osz. der komplexen Polarisation

Opt. Übergangsfrequenz $\omega_p(k) = \frac{1}{\hbar}\left(E_c(k) - E_v(k)\right)$

(i) <u>Halbleiter-Bloch-Gln.:</u>

$$\boxed{\begin{aligned}
&(1)\ \frac{\partial}{\partial t} f_e(k,t) = \frac{1}{i}\Omega_p \left(p^*(k,t) - p(k,t)\right) \\
&(2)\ \frac{\partial}{\partial t} p(k,t) = \frac{1}{i}\omega_p(k)\, p(k,t) + \frac{1}{i}\Omega_p \underbrace{(1 - f_e - f_h)}_{-\,\text{Inversion}} \\
&(3)\ \frac{\partial}{\partial t} f_h(k,t) = \frac{\partial}{\partial t} f_e(k,t)
\end{aligned}}$$

Rabi-Frequenz $\Omega_p = \frac{\mu \cdot E}{\hbar}$

<u>Bem.</u>: Kohärente Dynamik eines Ensembles unabh. durch klass. Lichtquelle getriebener 2-Niveau-Systeme
( <u>Opt. Blochgln.</u> )

<u>Also</u>: Ladungsträgergeneration (e-h Paar) als kohärenter 2-Stufen-Prozess beschreibbar.

$$E \xrightarrow[\text{erzeugt}]{(2)} p \xrightarrow[\text{generiert durch WW Ladungsträger}]{(1)} f_e, f_h$$